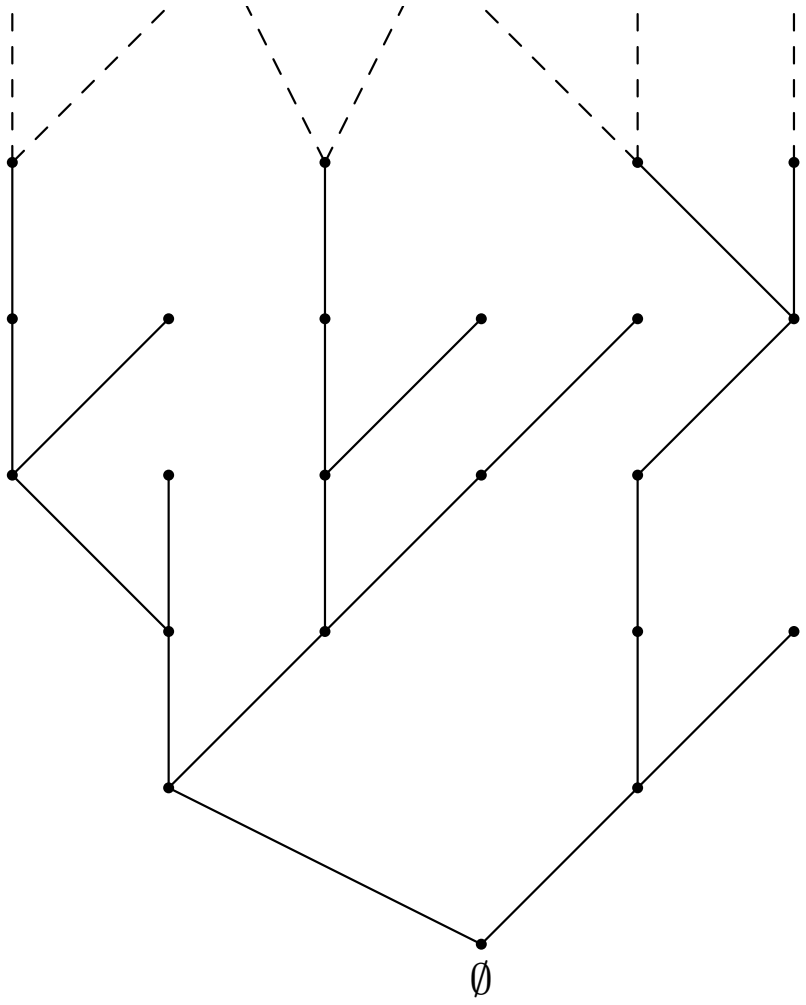
# Marches aléatoires $\lambda$-biaisées sur un arbre de Galton-Watson

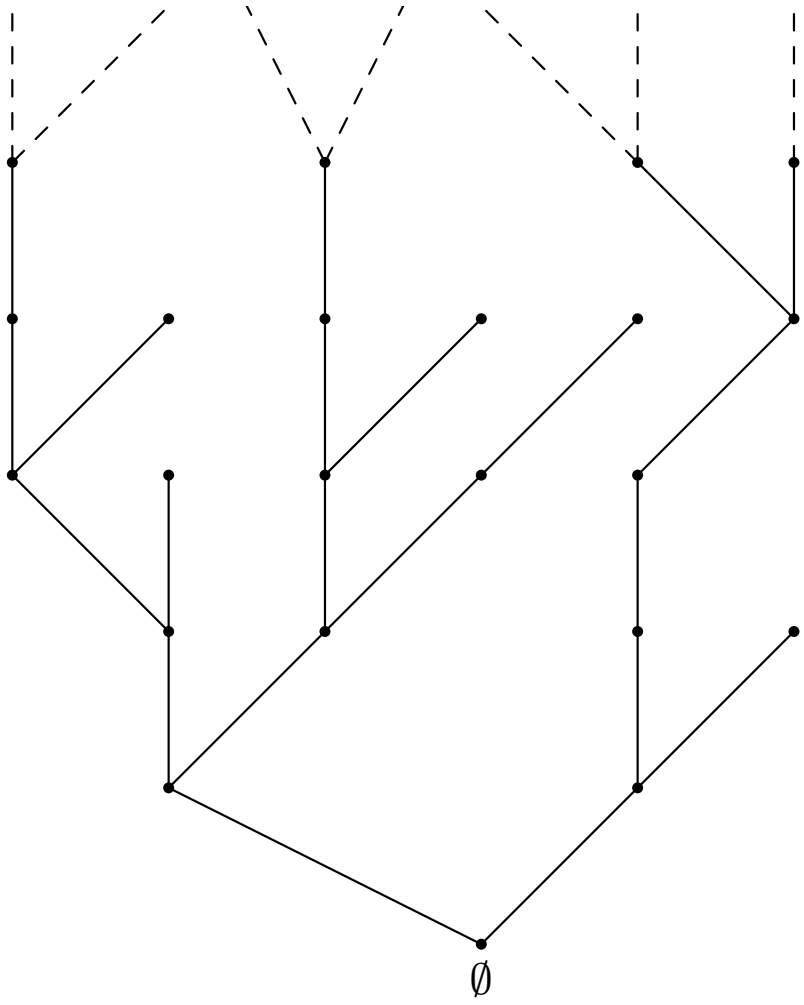
Loïc de Raphelis

Vendredi 29 août 2014

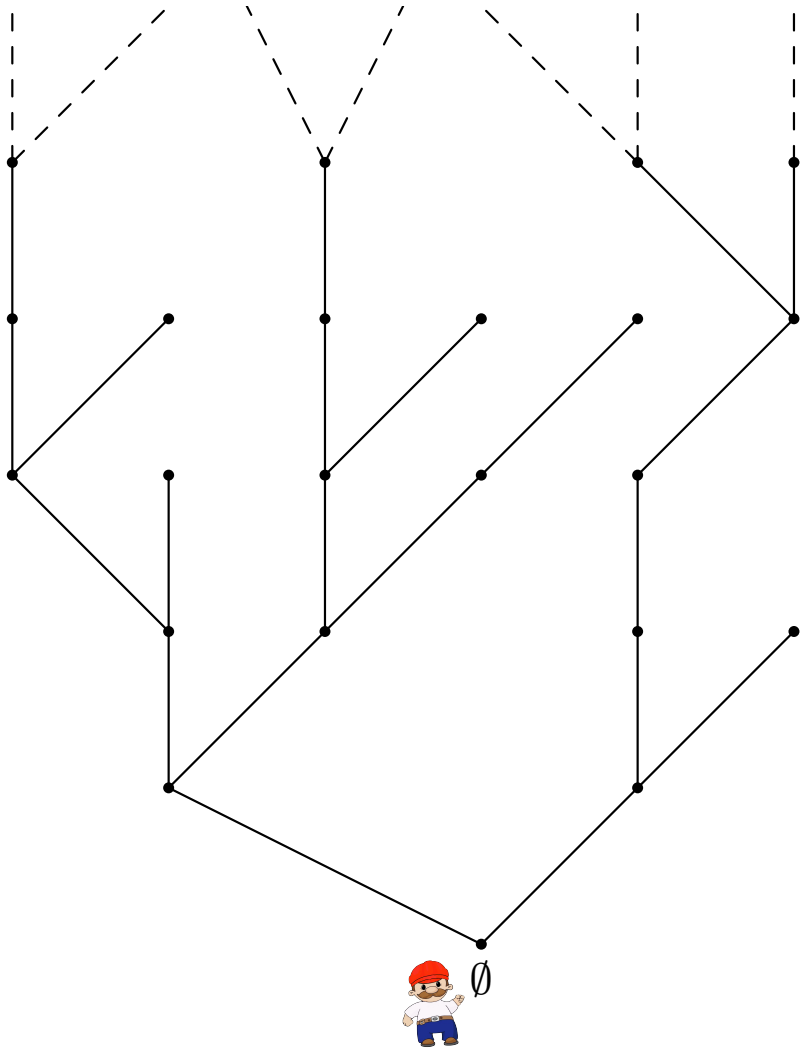
Soit $\mathbb{T}$ un arbre enraciné, et $\lambda > 0$ un réel positif.



Soit $\mathbb{T}$ un arbre enraciné, et $\lambda > 0$ un réel positif.
On définit $(X_n^{\mathbb{T}})_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire $\lambda$-biaisée sur $\mathbb{T}$ comme suit :

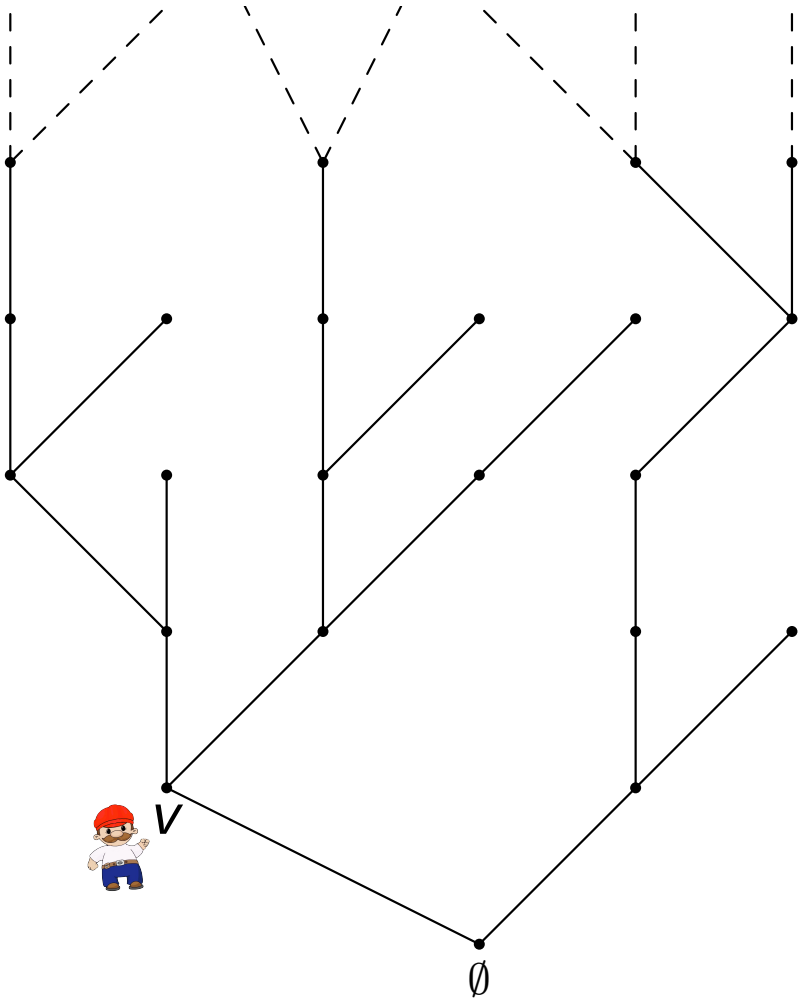


Soit $\mathbb{T}$ un arbre enraciné, et $\lambda > 0$ un réel positif.
On définit $(X_n^{\mathbb{T}})_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire $\lambda$-biaisée sur $\mathbb{T}$ comme suit :



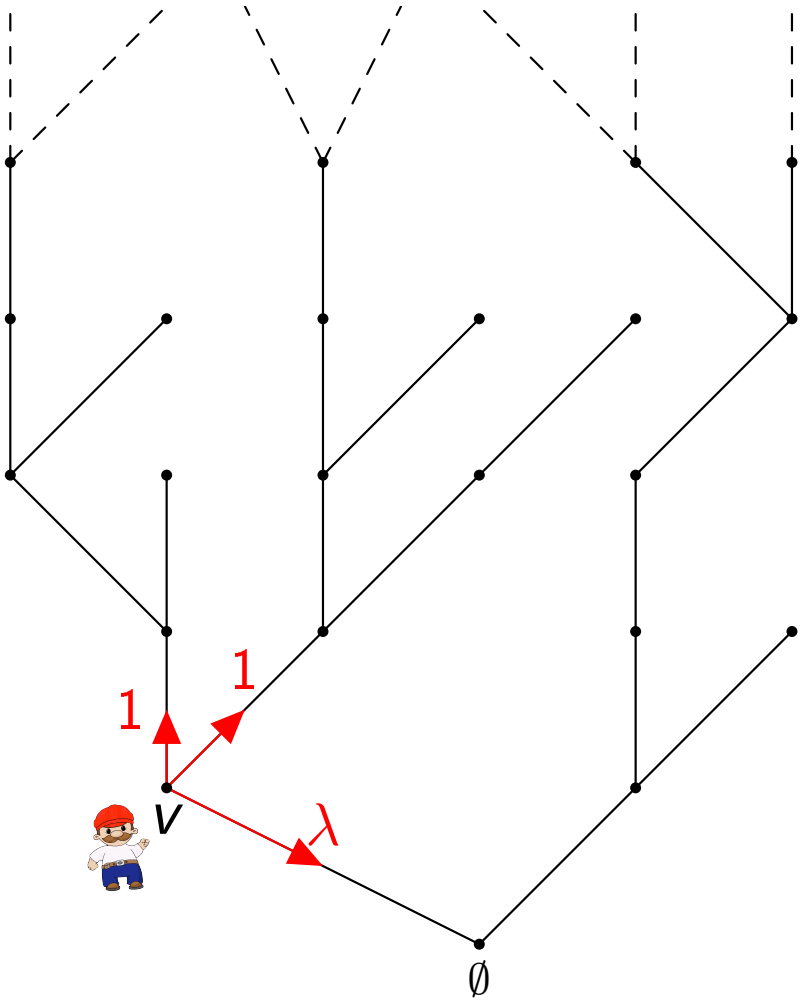

- La marche aléatoire commence en la racine $\emptyset$ : $X_0 = \emptyset$ p.s.

Soit $\mathbb{T}$ un arbre enraciné, et $\lambda > 0$ un réel positif.
On définit $(X_n^{\mathbb{T}})_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire $\lambda$-biaisée sur $\mathbb{T}$ comme suit :




- La marche aléatoire commence en la racine $\emptyset$ : $X_0 = \emptyset$ p.s.
- Si pour $n \in \mathbb{N}$ on a $X_n = v$, où $v \in \mathbb{T}$, alors

Soit $\mathbb{T}$ un arbre enraciné, et $\lambda > 0$ un réel positif.
On définit $(X_n^{\mathbb{T}})_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire $\lambda$-biaisée sur $\mathbb{T}$ comme suit :



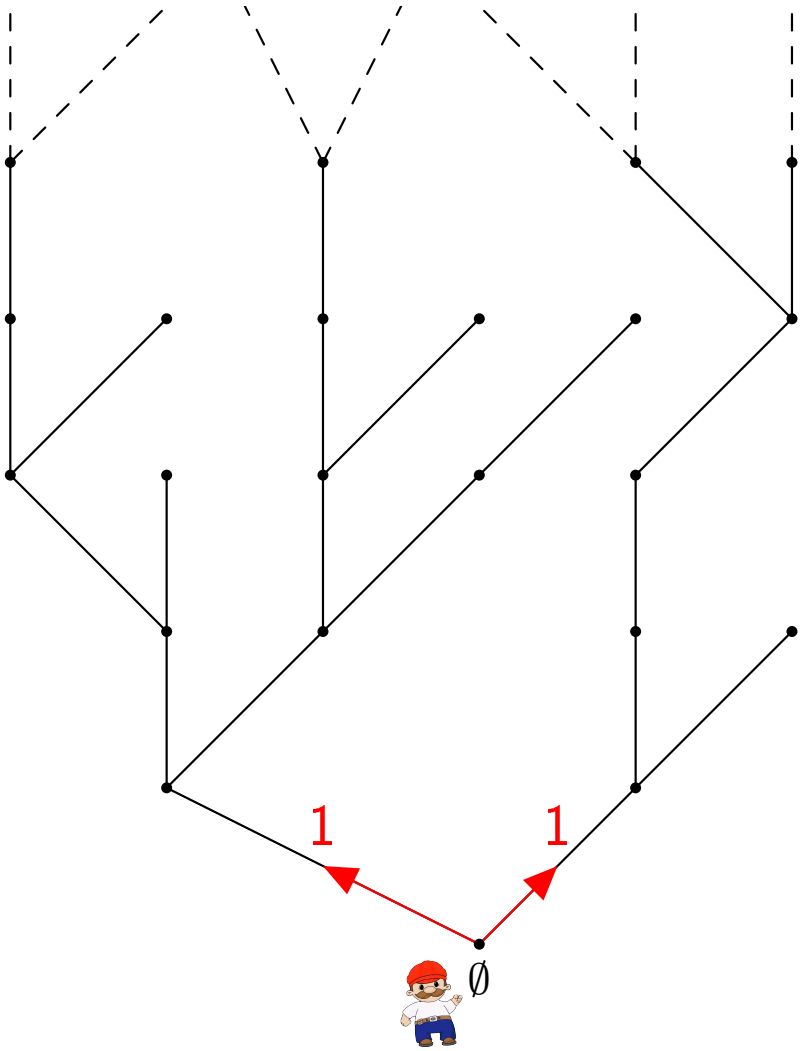

- La marche aléatoire commence en la racine $\emptyset$ : $X_0 = \emptyset$ p.s.
- Si pour $n \in \mathbb{N}$ on a $X_n = v$, où $v \in \mathbb{T}$, alors

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = x | X_n = v) = \frac{1}{\lambda + d_v}$$

Pour tout $x \in C_v$, et

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = \Pi v | X_n = v) = \frac{\lambda}{\lambda + d_v}$$

Soit $\mathbb{T}$ un arbre enraciné, et $\lambda > 0$ un réel positif.
On définit $(X_n^{\mathbb{T}})_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire $\lambda$-biaisée sur $\mathbb{T}$ comme suit :




- La marche aléatoire commence en la racine $\emptyset$ : $X_0 = \emptyset$ p.s.
- Si pour $n \in \mathbb{N}$ on a $X_n = v$, où $v \in \mathbb{T}$, alors

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = x | X_n = v) = \frac{1}{\lambda + d_v}$$

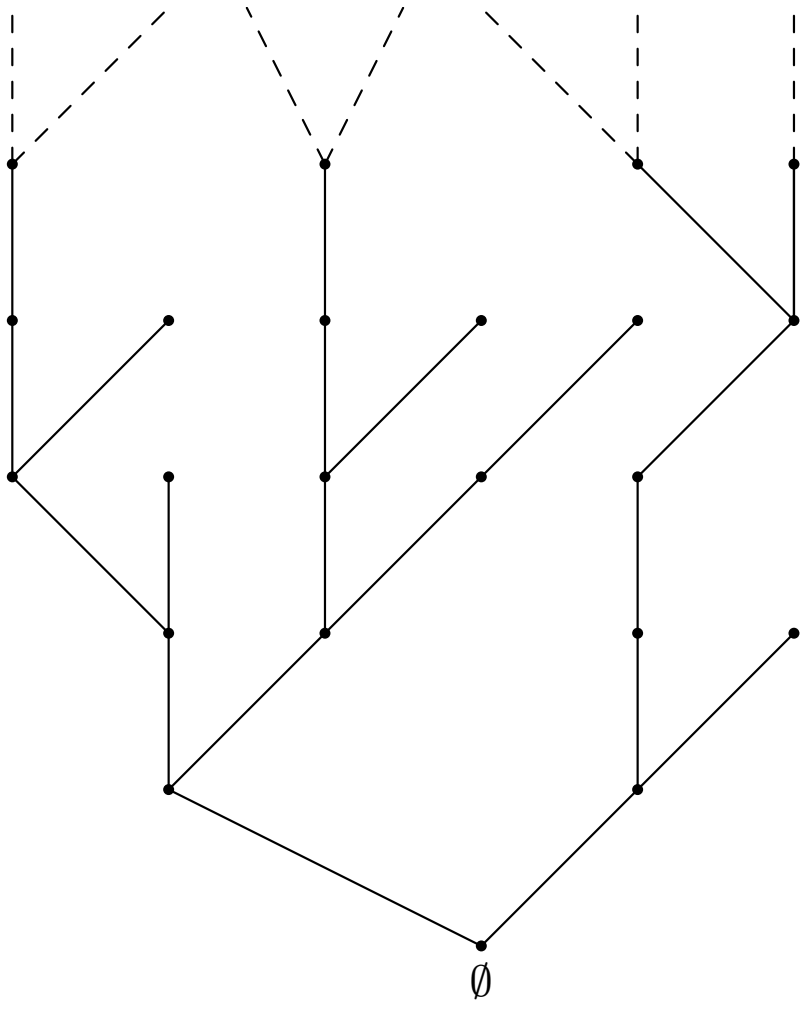
Pour tout $x \in C_v$, et

$$\mathbf{P}(X_{n+1} = \Pi v | X_n = v) = \frac{\lambda}{\lambda + d_v}$$

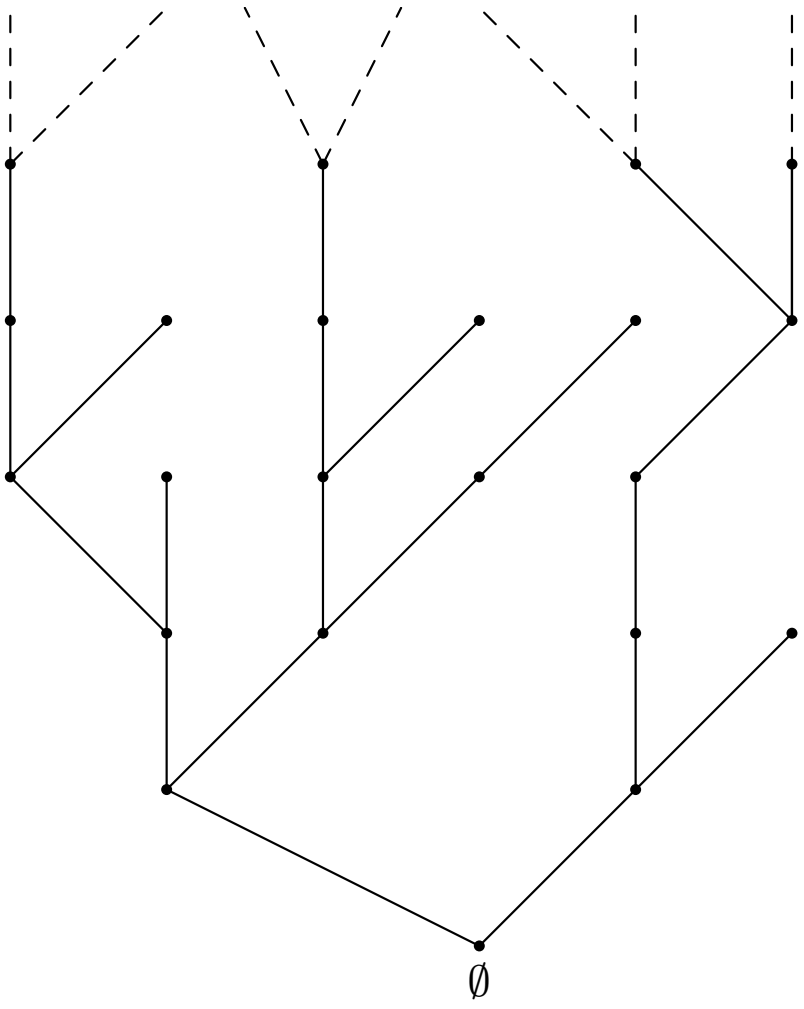
$$\left(\mathbf{P}(X_{n+1} = \{i\} | X_n = \emptyset) = \frac{1}{d_\emptyset}\right.$$

$$\left.\forall k \leq d_\emptyset\right)$$

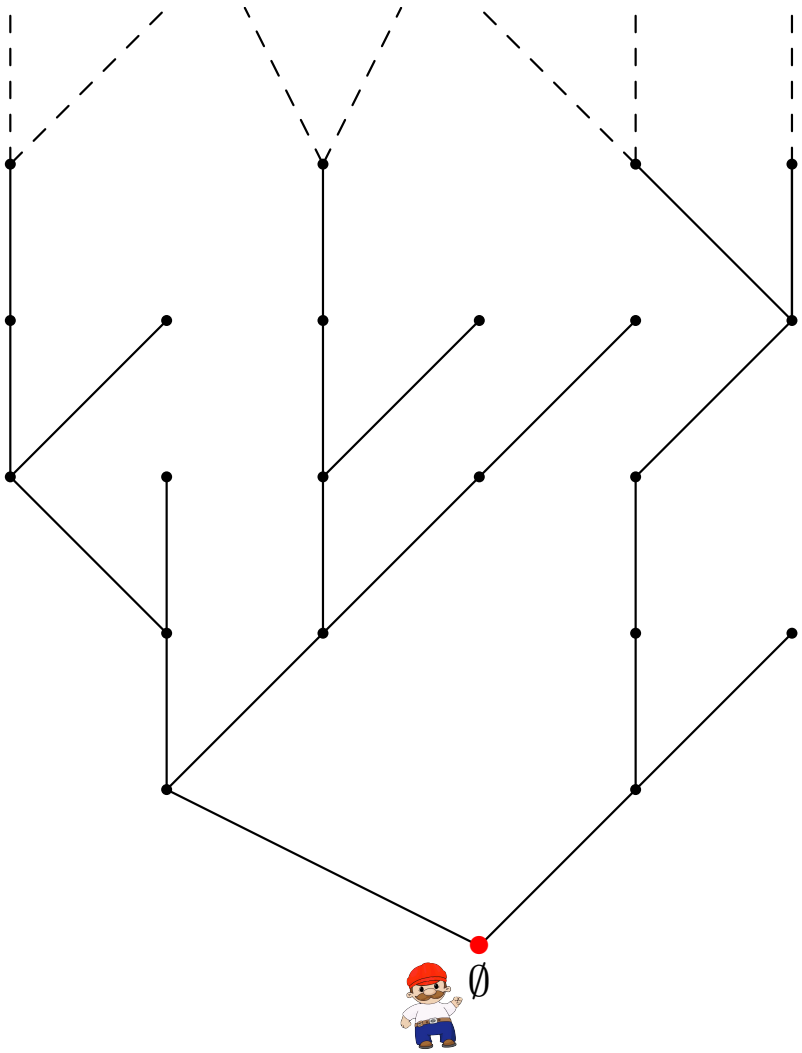
Soit $\mathbb{T}$ un arbre fixé, $\lambda > 0$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur $\mathbb{T}$.

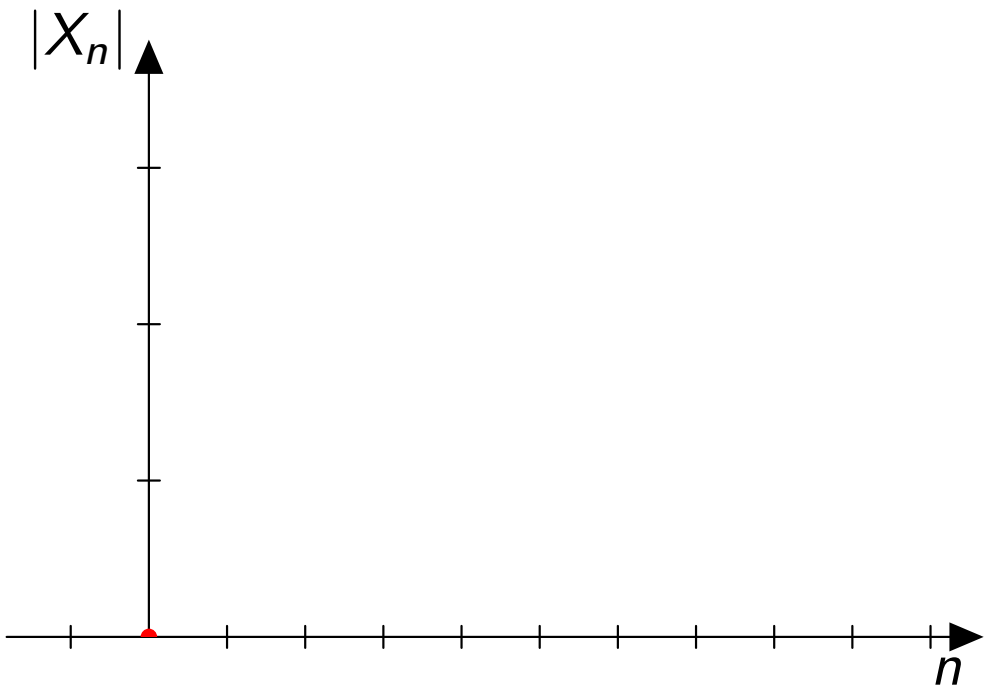


Soit $\mathbb{T}$ un arbre fixé, $\lambda > 0$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur $\mathbb{T}$.
$(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **fonction de hauteur** de la marche aléatoire.

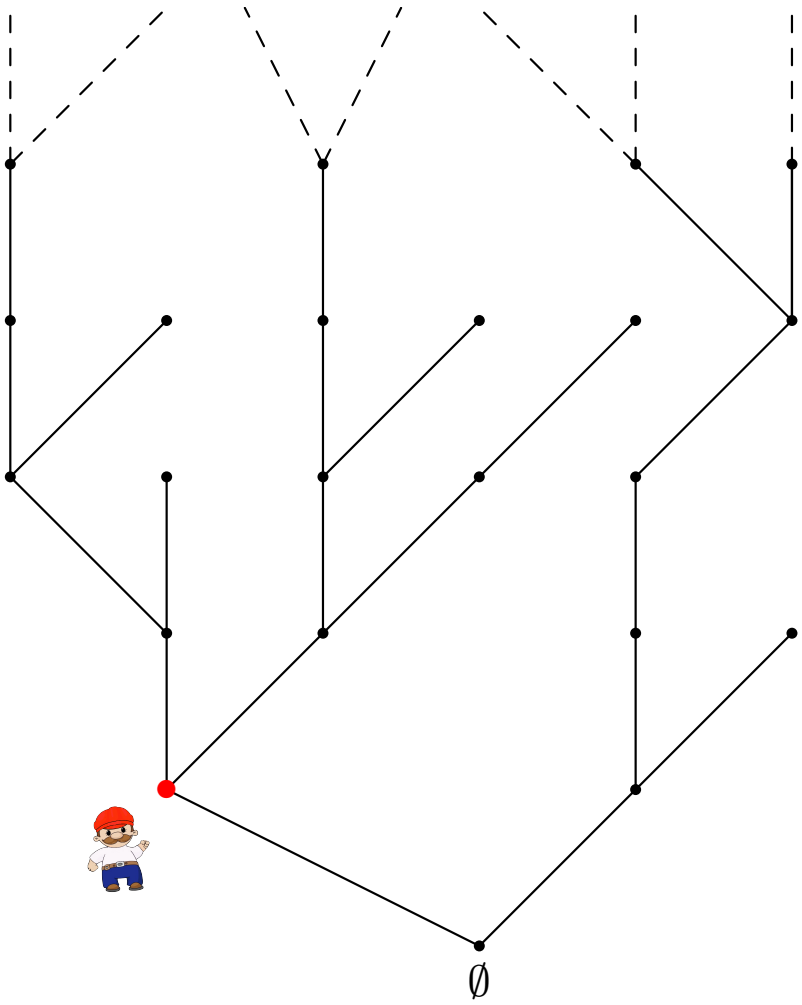


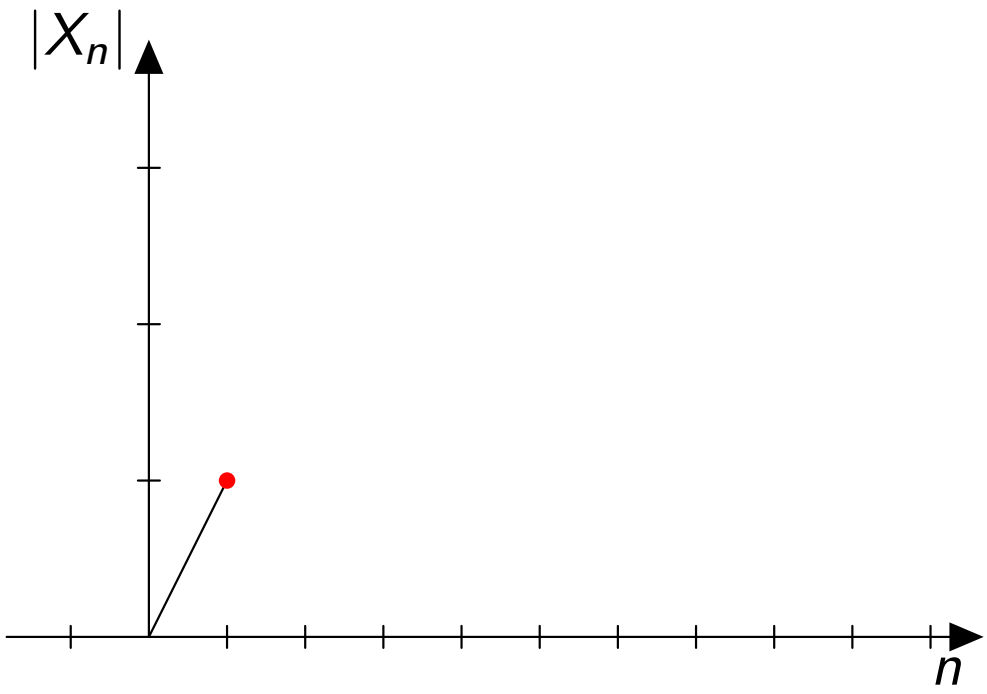
Soit $\mathbb{T}$ un arbre fixé, $\lambda > 0$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur $\mathbb{T}$.
$(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **fonction de hauteur** de la marche aléatoire.



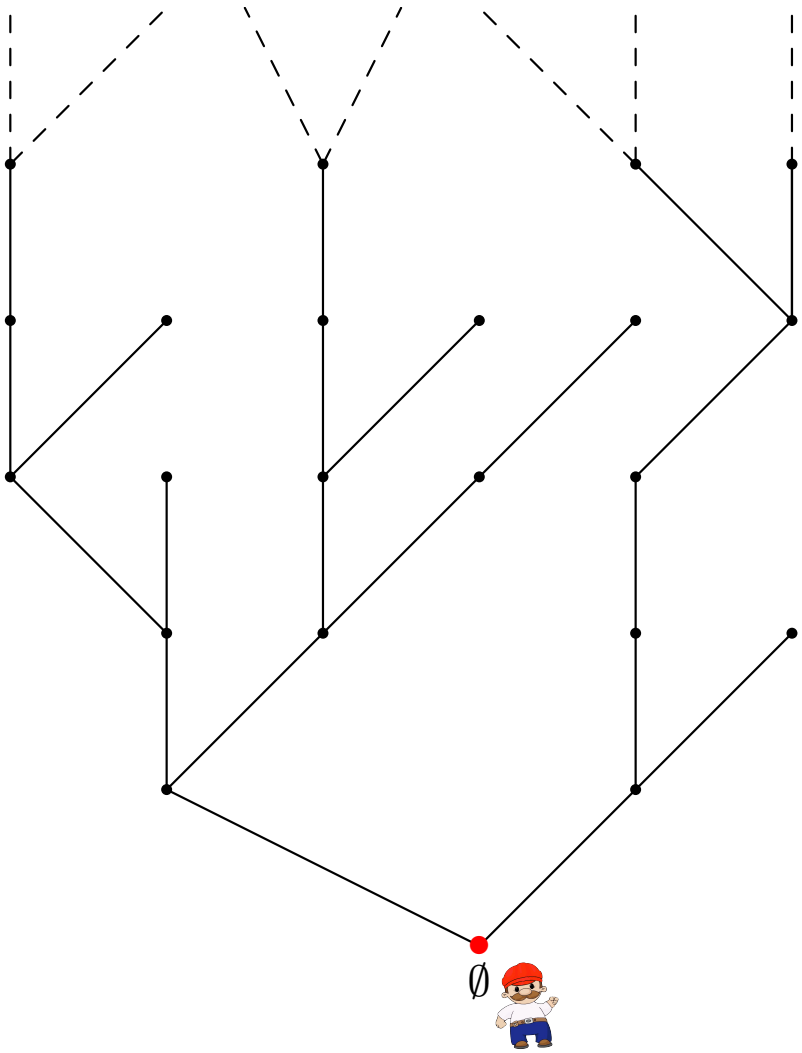



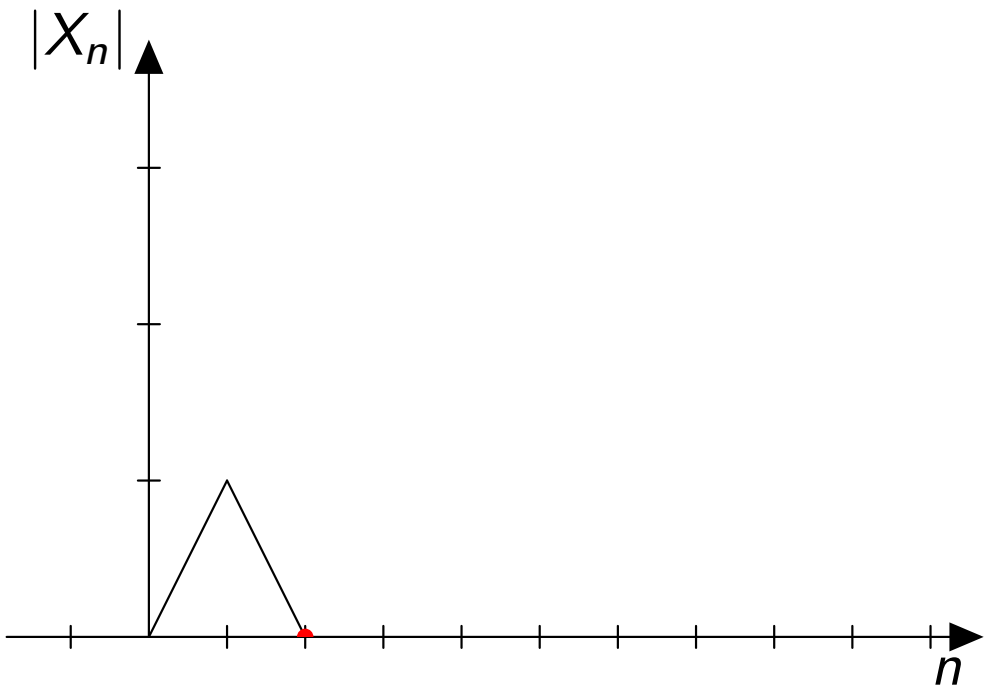
Soit $\mathbb{T}$ un arbre fixé, $\lambda > 0$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur $\mathbb{T}$.
$(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **fonction de hauteur** de la marche aléatoire.



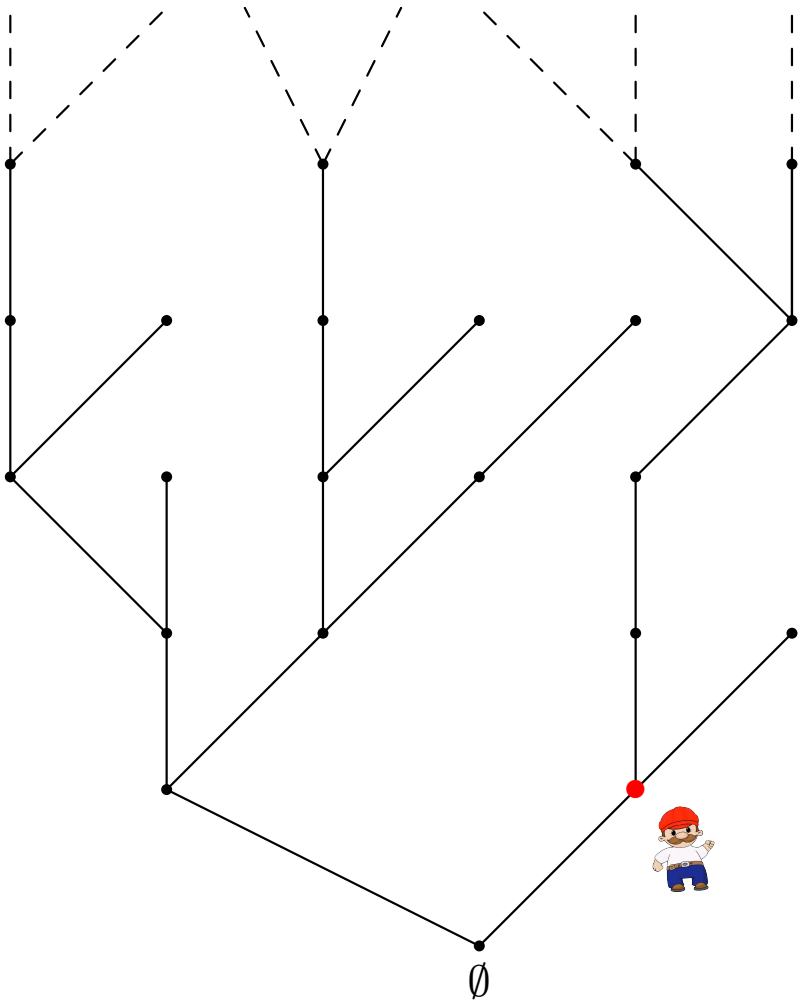



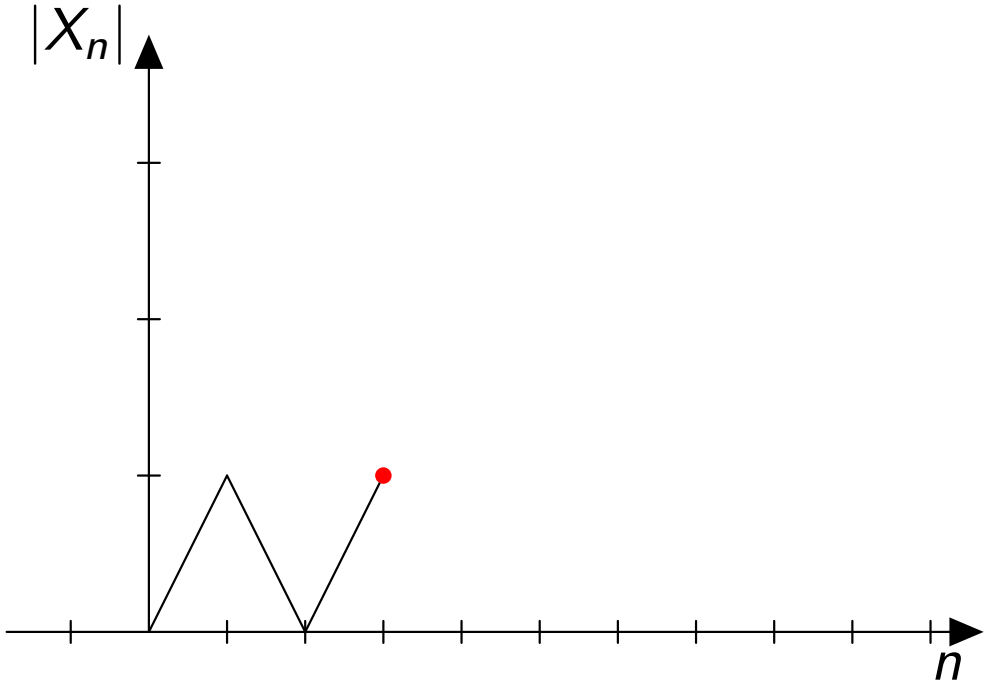
Soit $\mathbb{T}$ un arbre fixé, $\lambda > 0$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur $\mathbb{T}$.
$(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **fonction de hauteur** de la marche aléatoire.



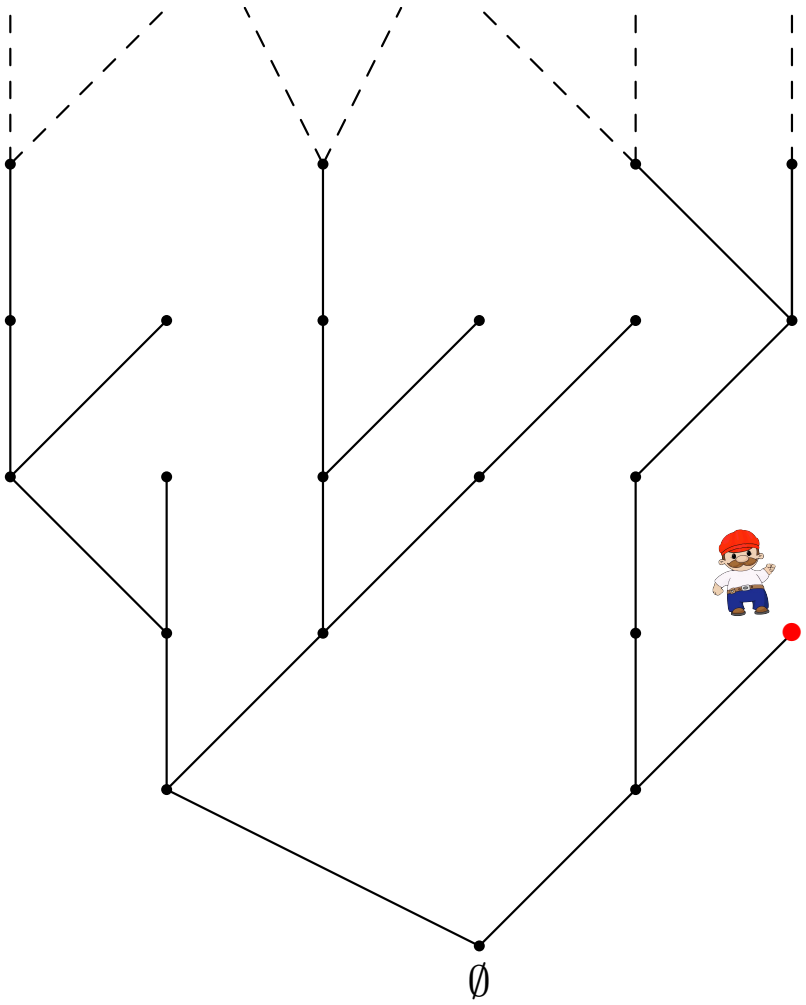



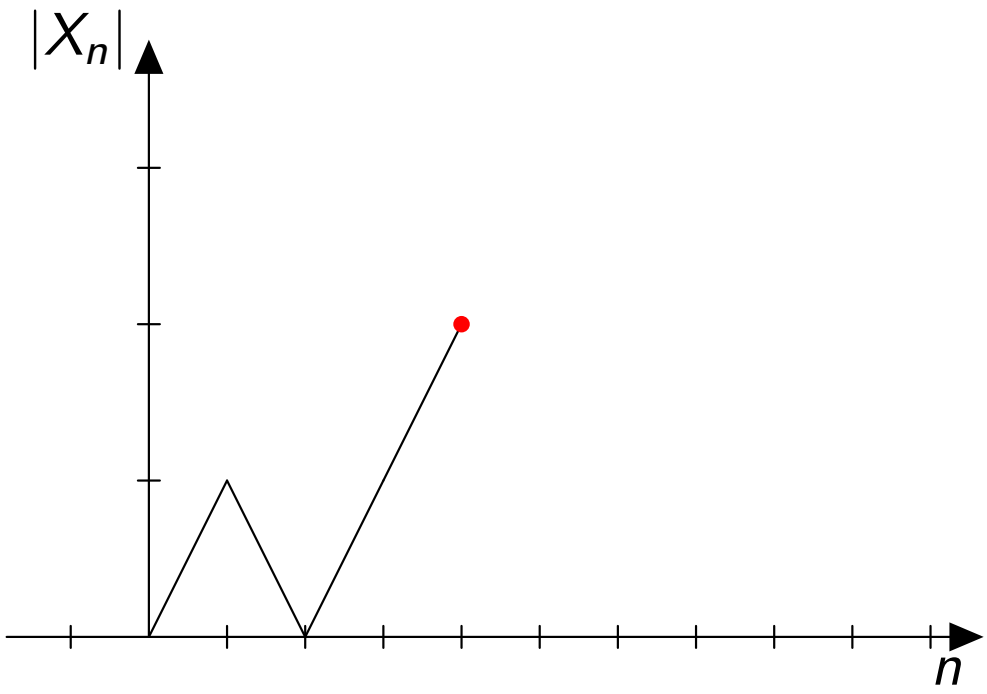
Soit $\mathbb{T}$ un arbre fixé, $\lambda > 0$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur $\mathbb{T}$.
$(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **fonction de hauteur** de la marche aléatoire.



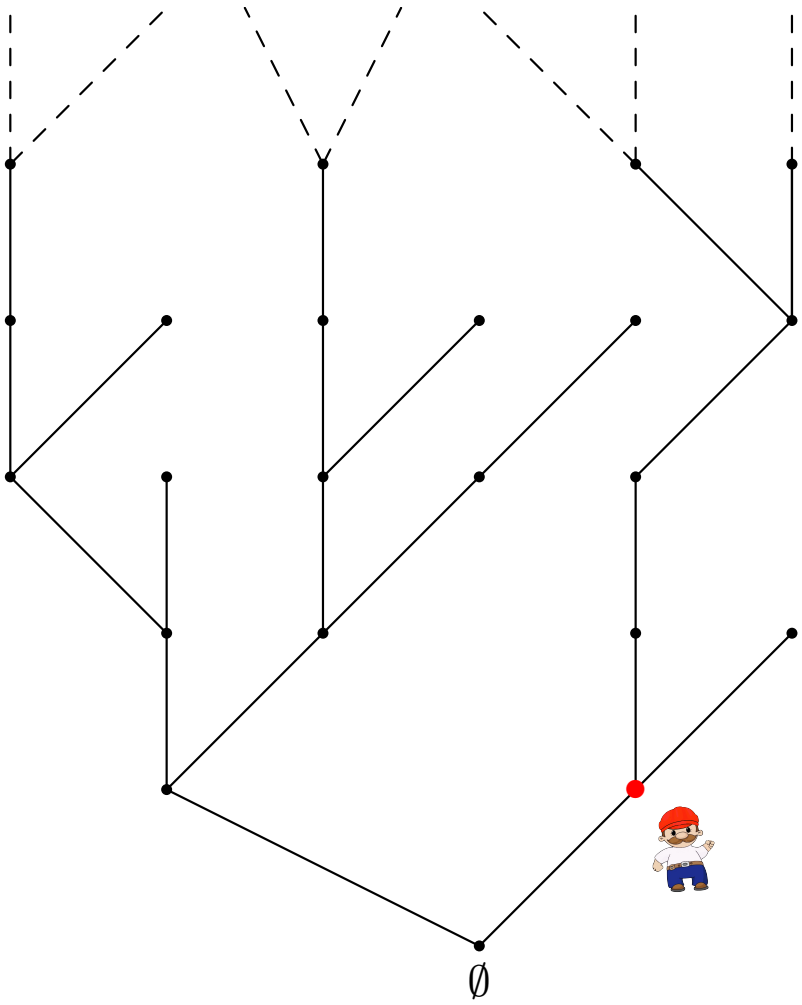



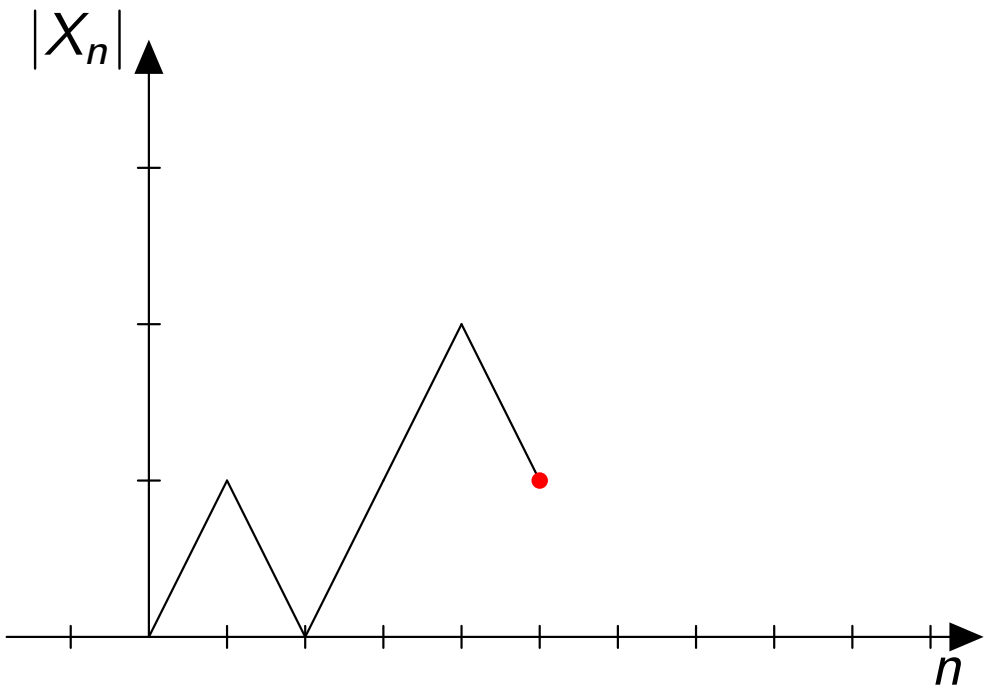
Soit $\mathbb{T}$ un arbre fixé, $\lambda > 0$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur $\mathbb{T}$.
$(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **fonction de hauteur** de la marche aléatoire.



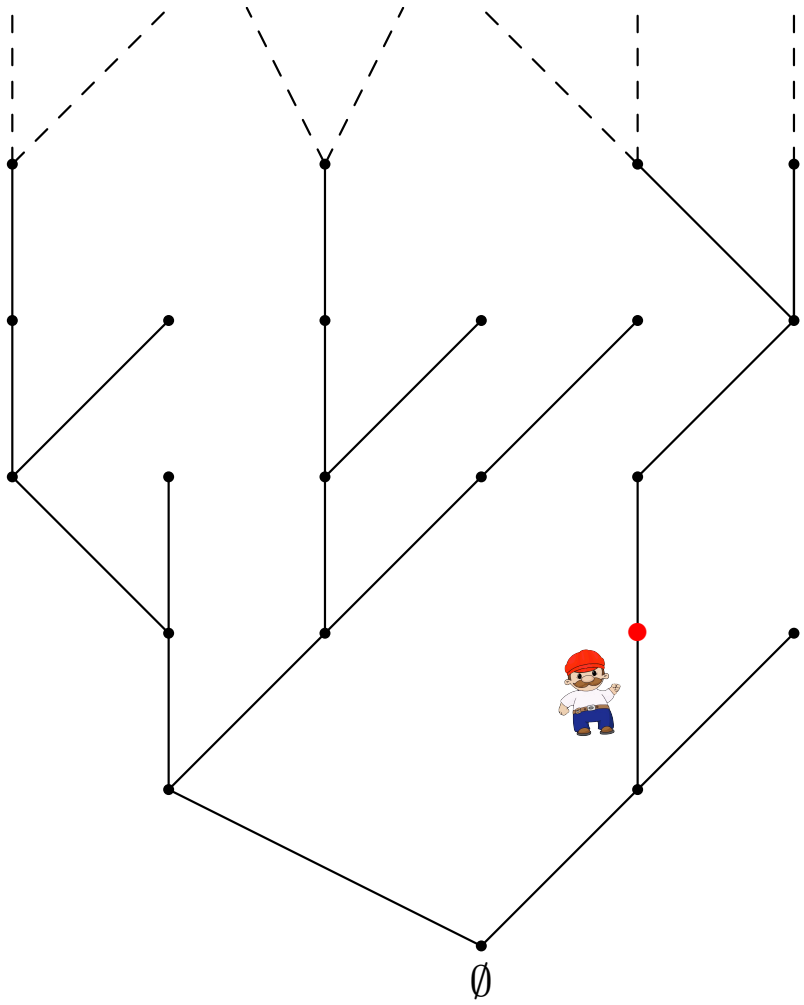



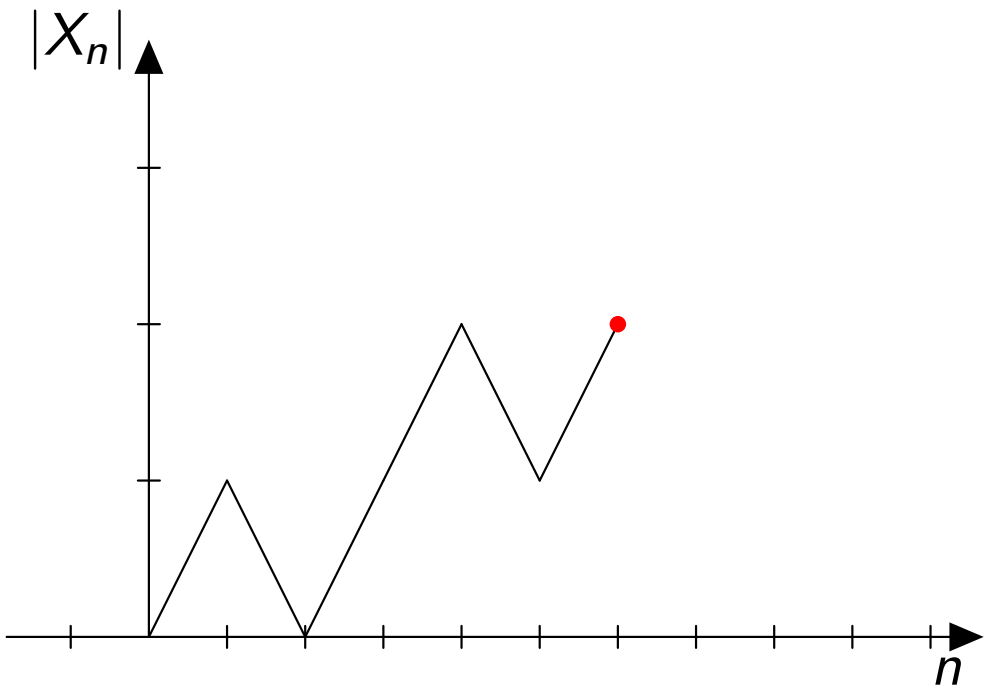
Soit $\mathbb{T}$ un arbre fixé, $\lambda > 0$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur $\mathbb{T}$.
$(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **fonction de hauteur** de la marche aléatoire.



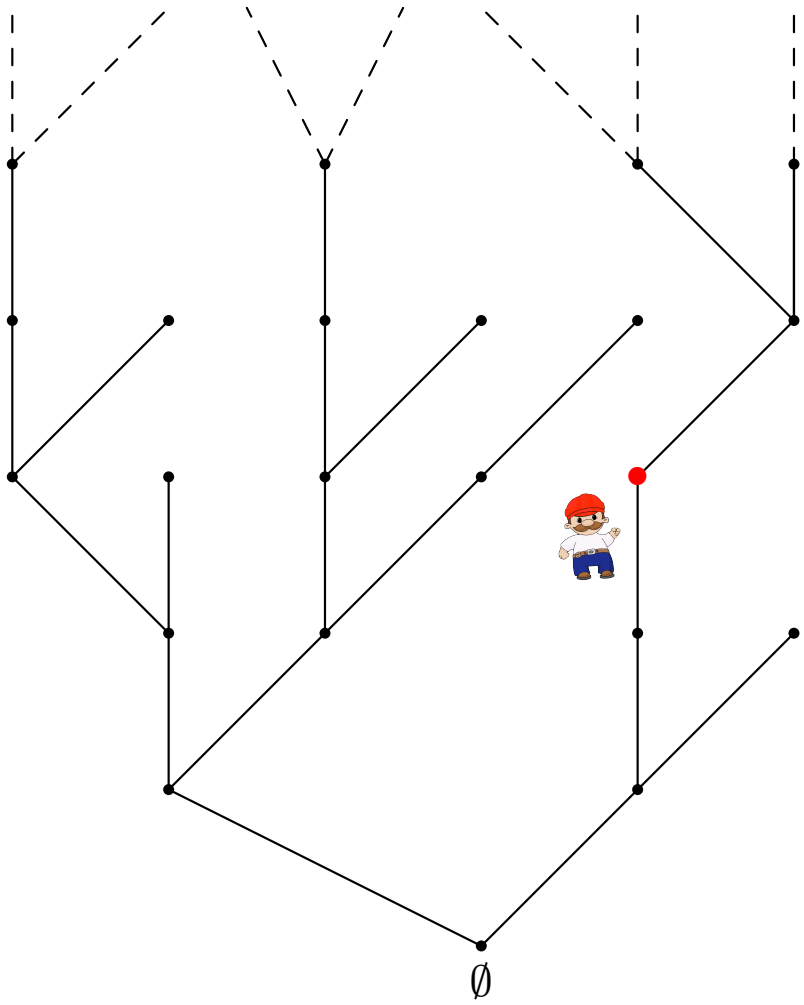



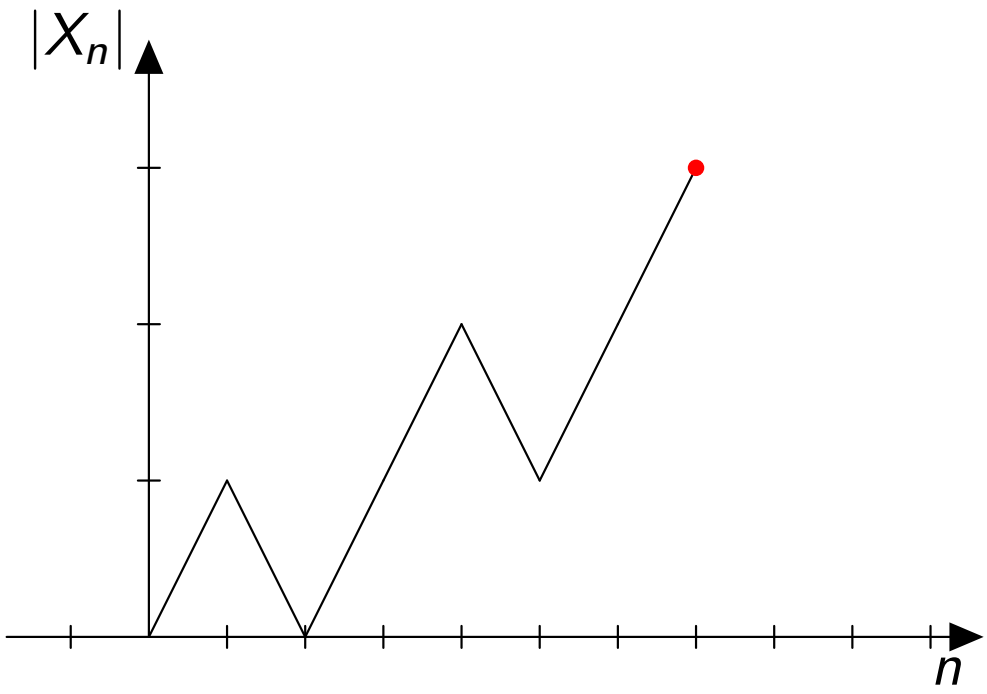
Soit $\mathbb{T}$ un arbre fixé, $\lambda > 0$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur $\mathbb{T}$.
$(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **fonction de hauteur** de la marche aléatoire.



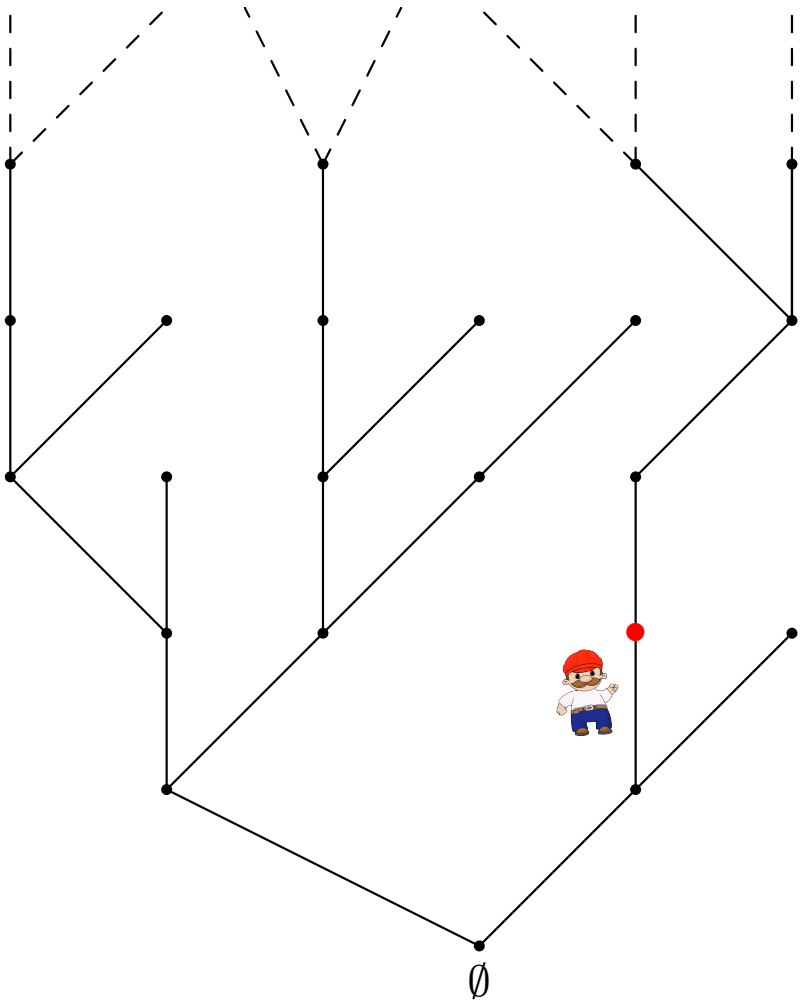



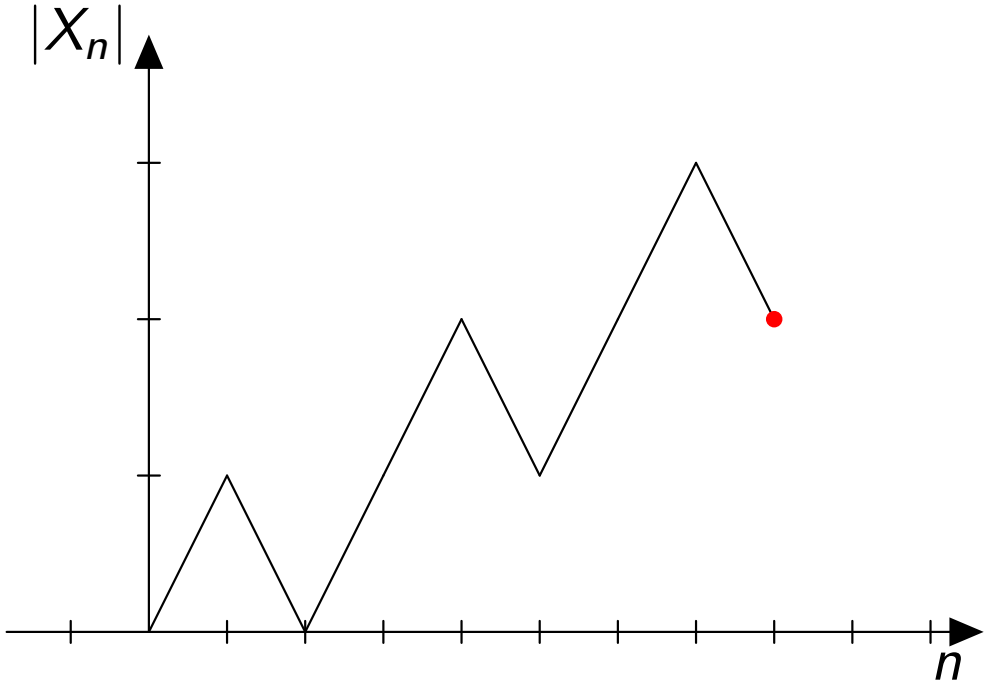
Soit $\mathbb{T}$ un arbre fixé, $\lambda > 0$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur $\mathbb{T}$.
$(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **fonction de hauteur** de la marche aléatoire.



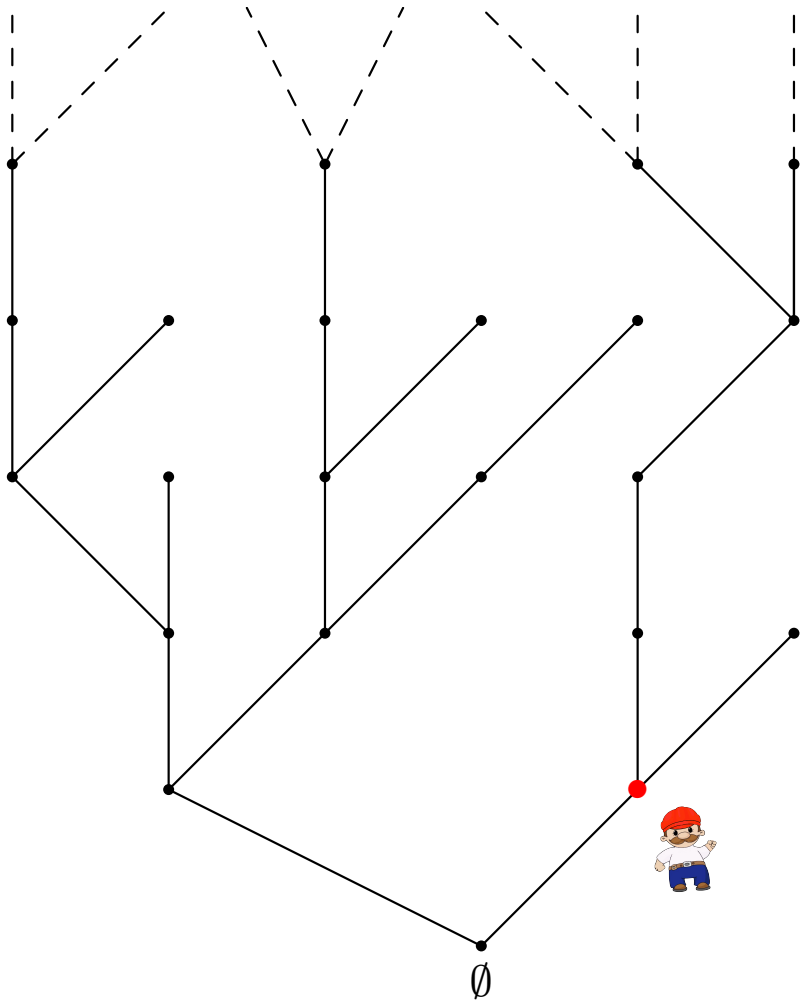



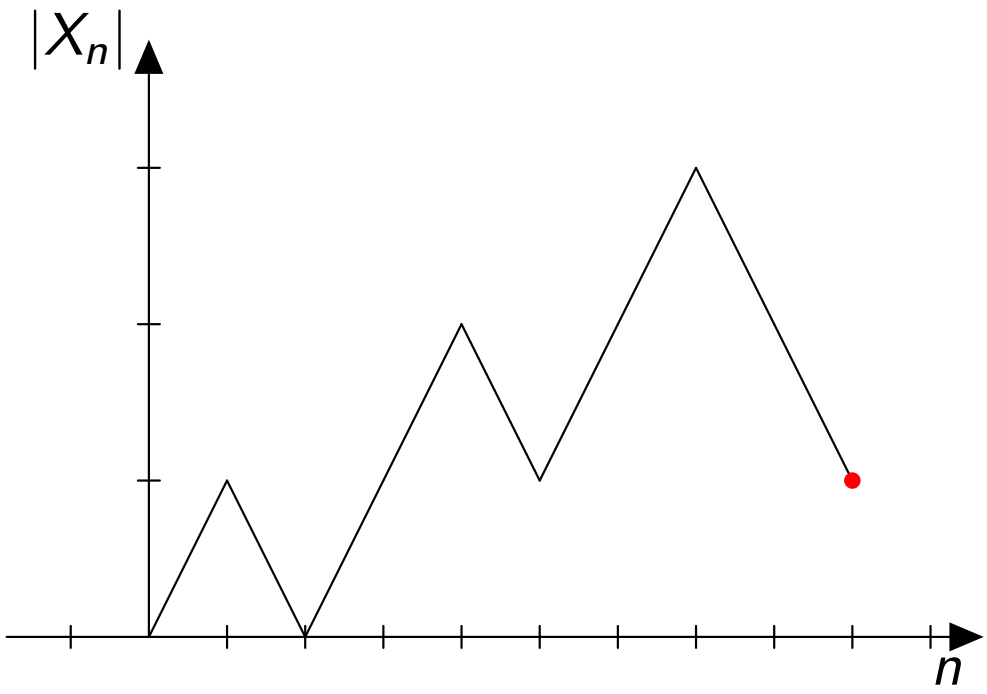
Soit $\mathbb{T}$ un arbre fixé, $\lambda > 0$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur $\mathbb{T}$.
$(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **fonction de hauteur** de la marche aléatoire.



Soit $\mathbb{T}$ un arbre fixé, $\lambda > 0$, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire sur $\mathbb{T}$.
$(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est la **fonction de hauteur** de la marche aléatoire.



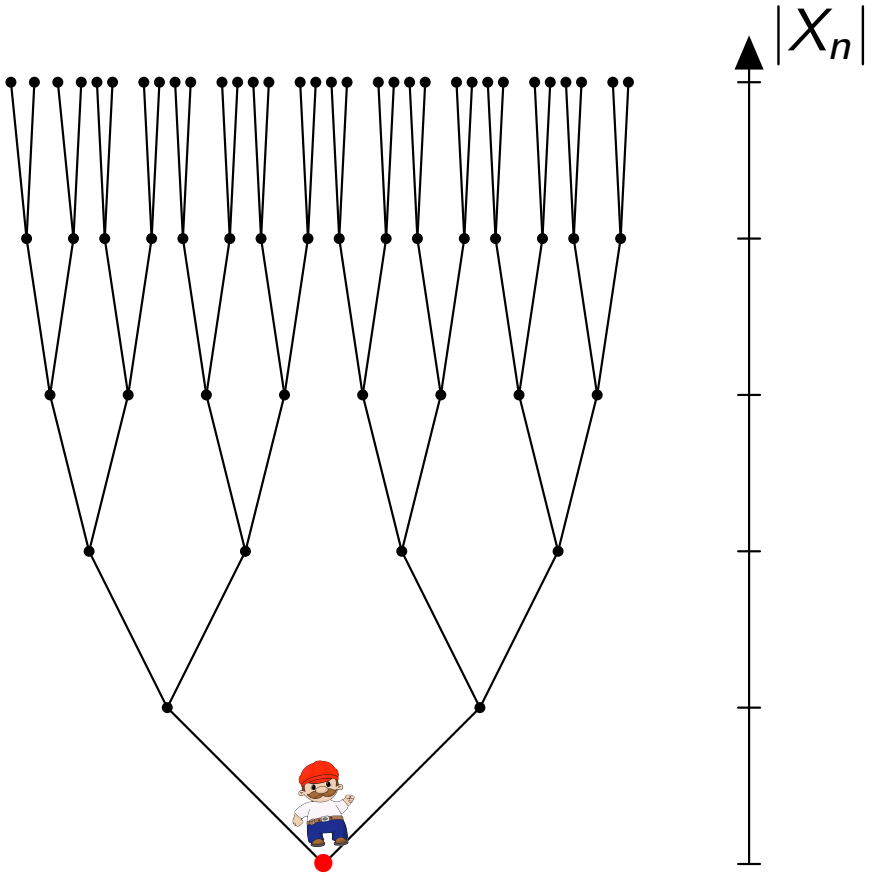
La question qui nous intéresse est la suivante :

La question qui nous intéresse est la suivante :

$$\text{Quel est le comportement de } |X_n| \text{ lorsque } n \to +\infty \,?$$

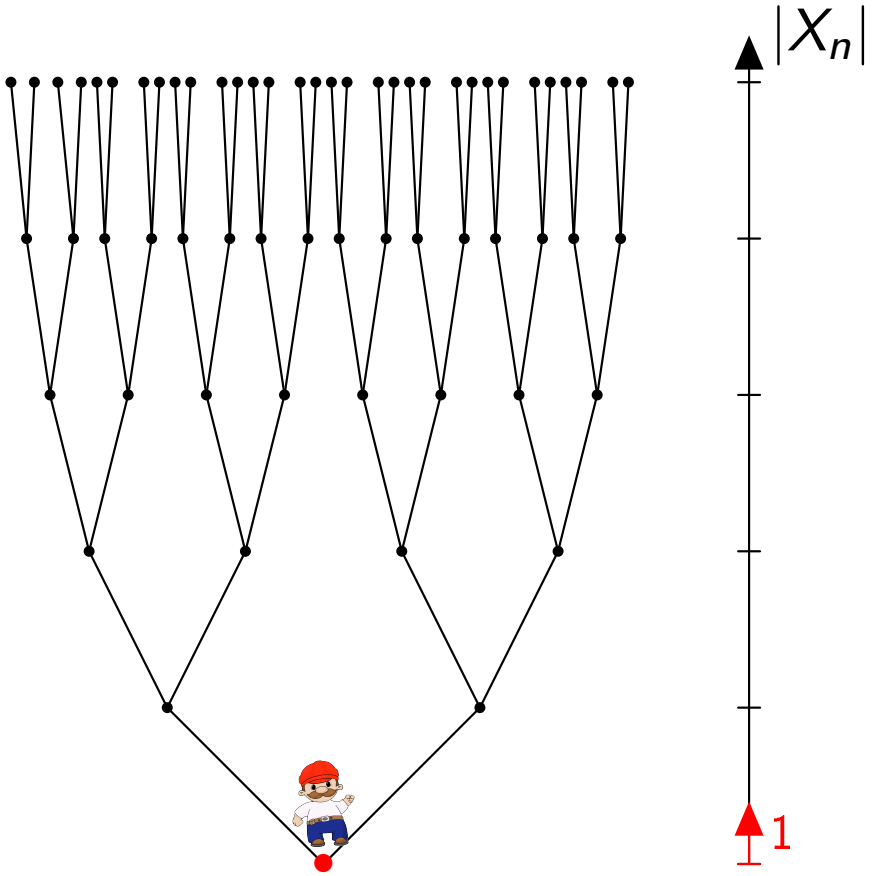
## Un cas particulier

Supposons que $\mathbb{T}$ soit l'arbre binaire.



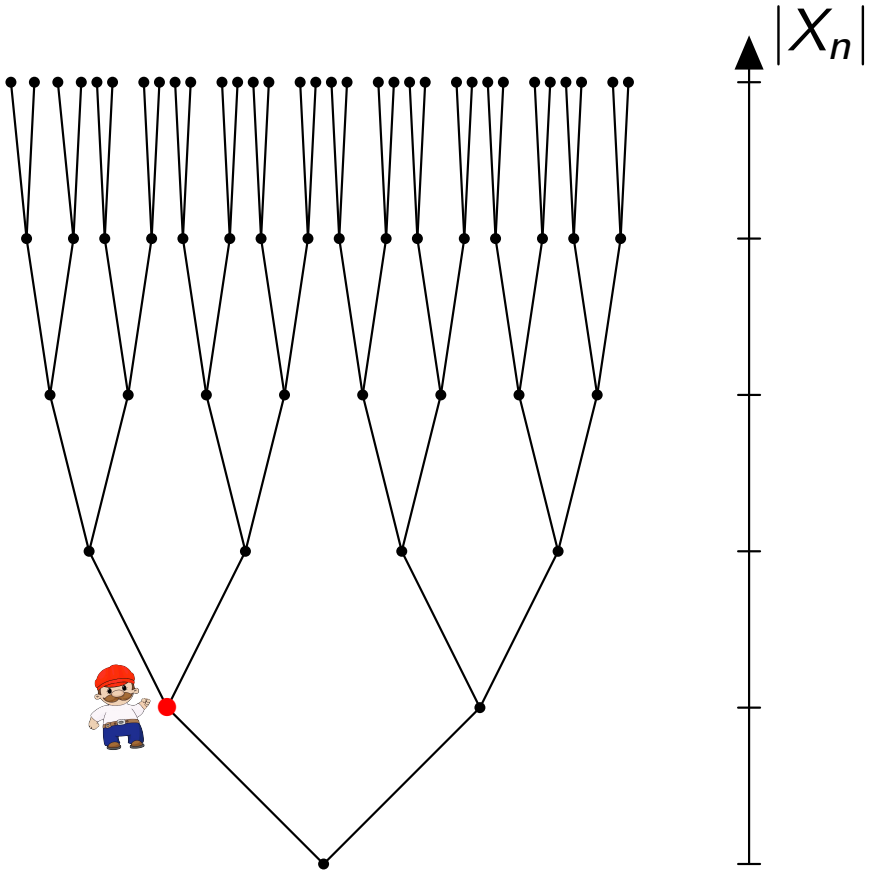
## Un cas particulier

Supposons que $\mathbb{T}$ soit l'arbre binaire.



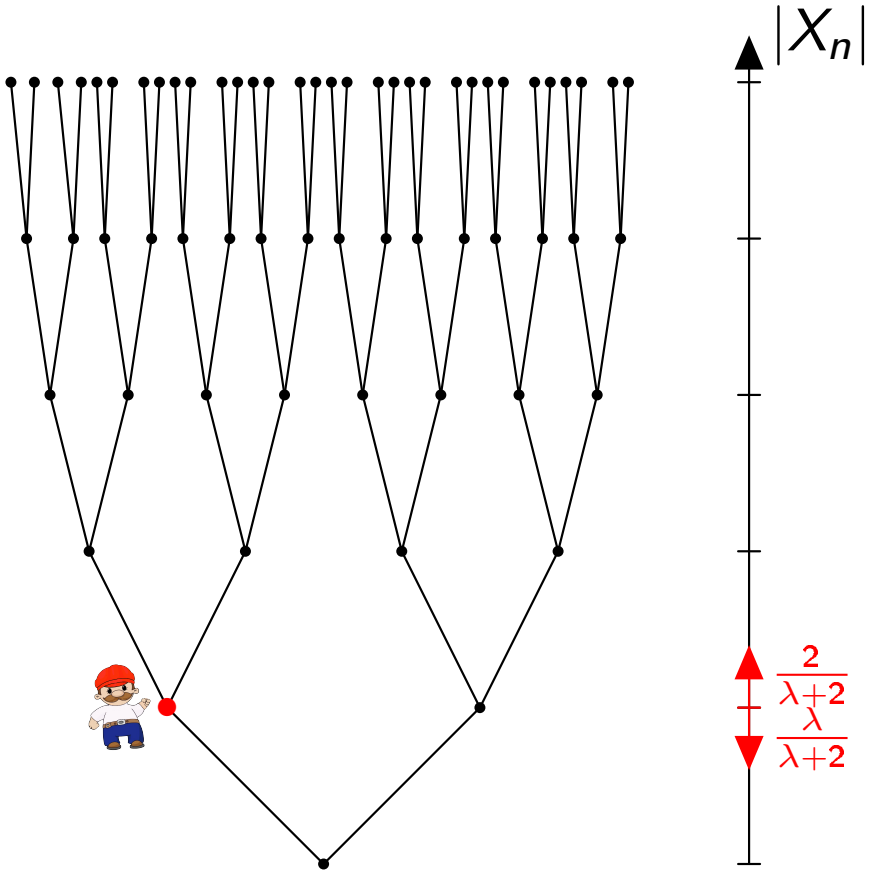
## Un cas particulier

Supposons que $\mathbb{T}$ soit l'arbre binaire.



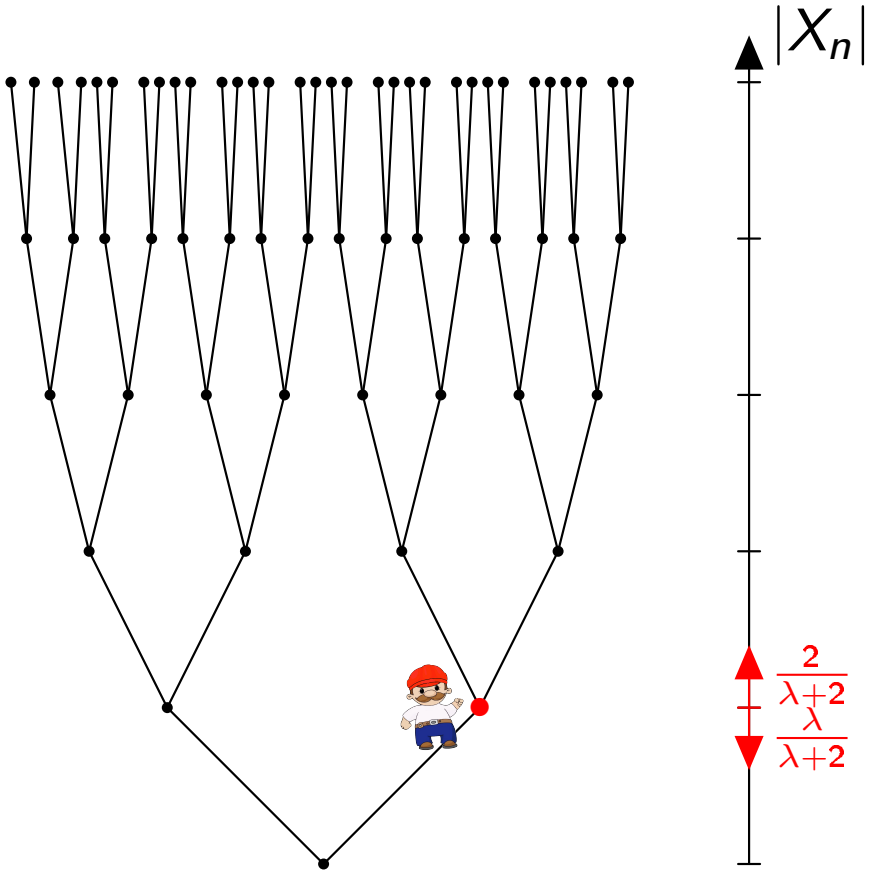
## Un cas particulier

Supposons que $\mathbb{T}$ soit l'arbre binaire.



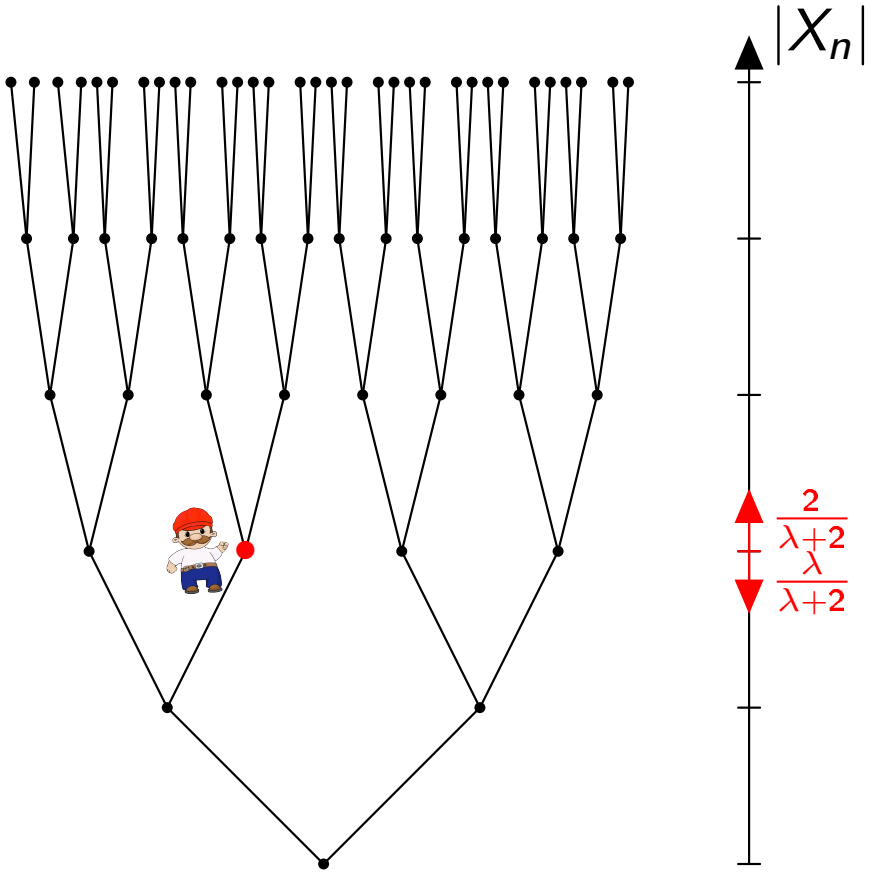
## Un cas particulier

Supposons que $\mathbb{T}$ soit l'arbre binaire.



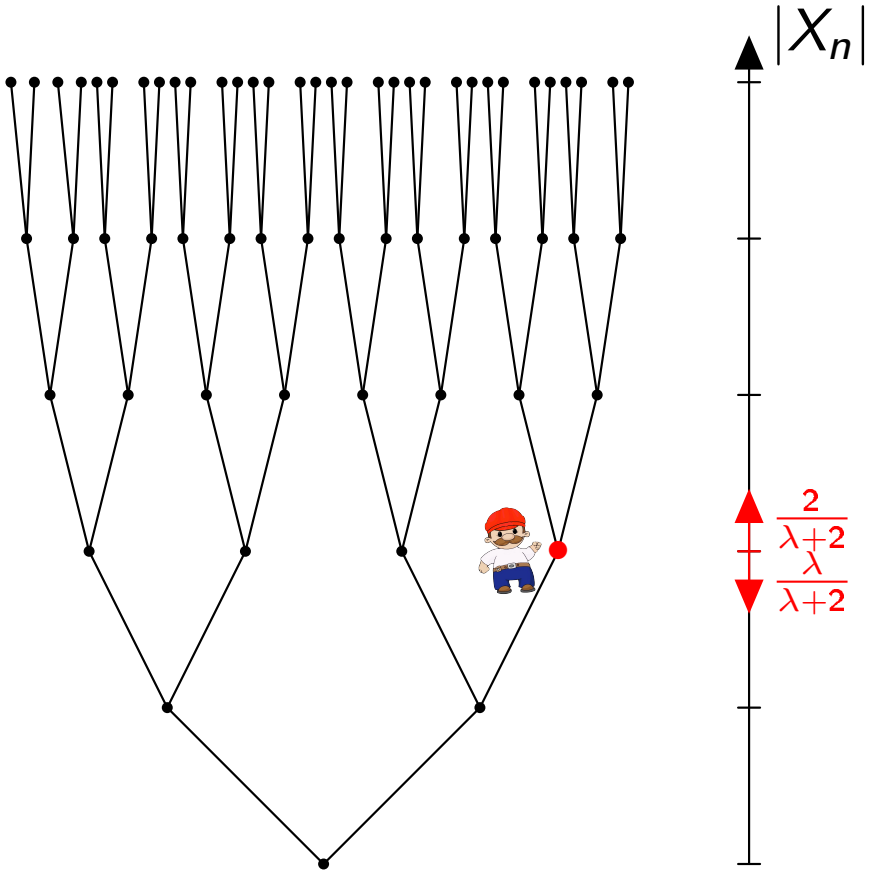
## Un cas particulier

Supposons que $\mathbb{T}$ soit l'arbre binaire.



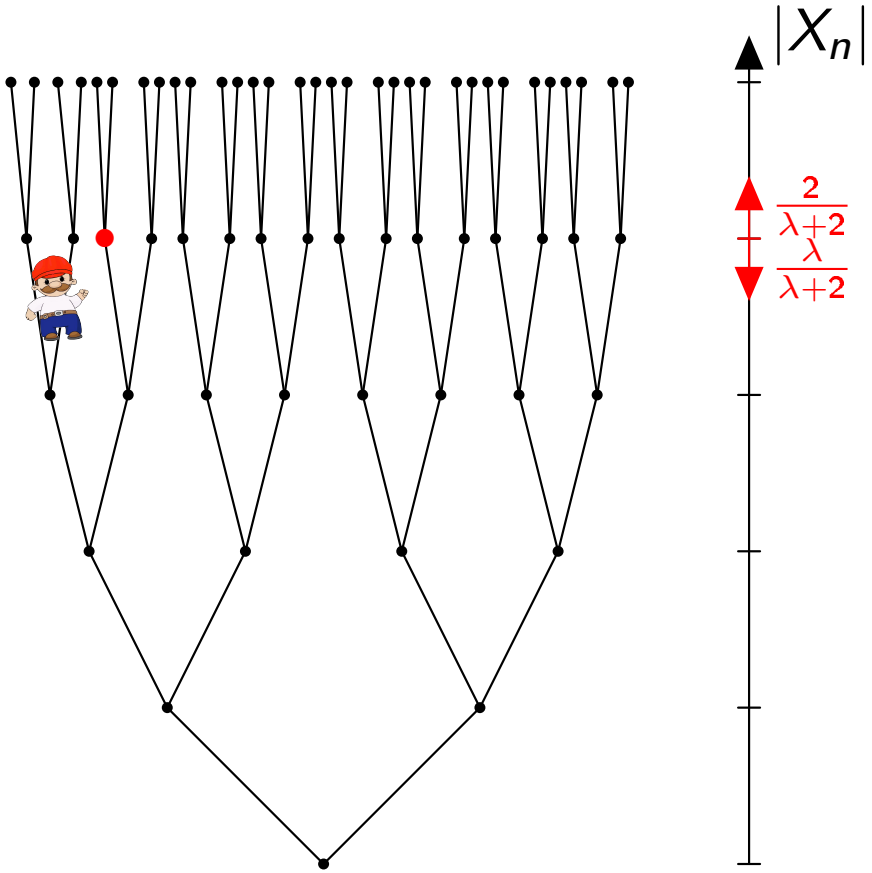
## Un cas particulier

Supposons que $\mathbb{T}$ soit l'arbre binaire.



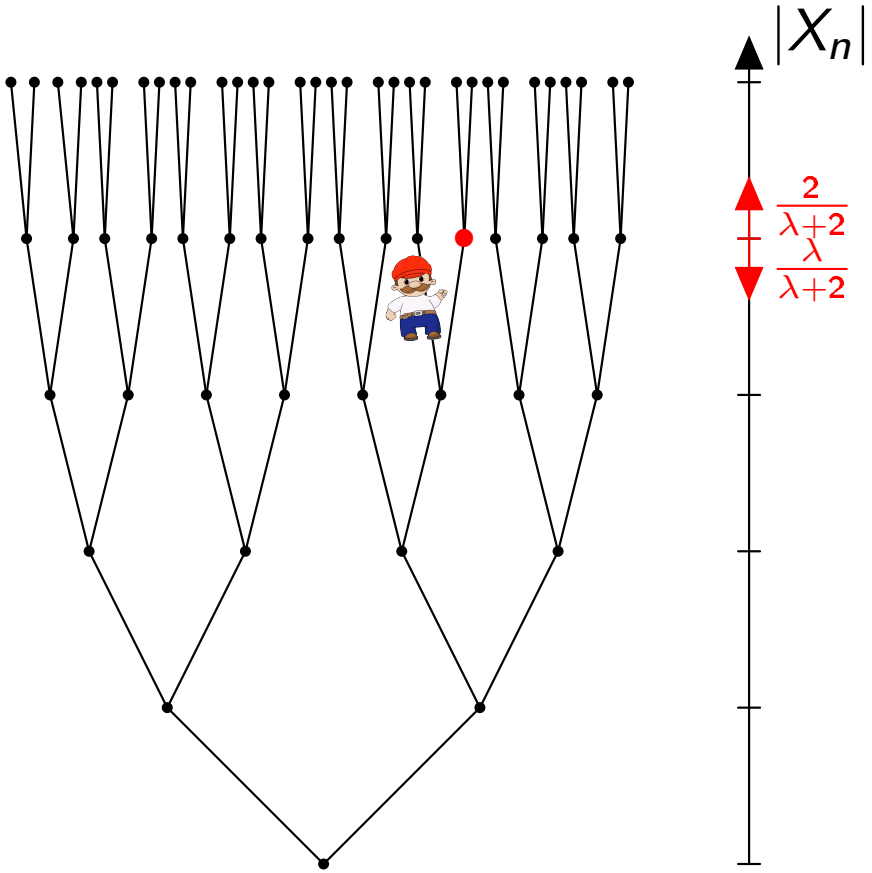
## Un cas particulier

Supposons que $\mathbb{T}$ soit l'arbre binaire.



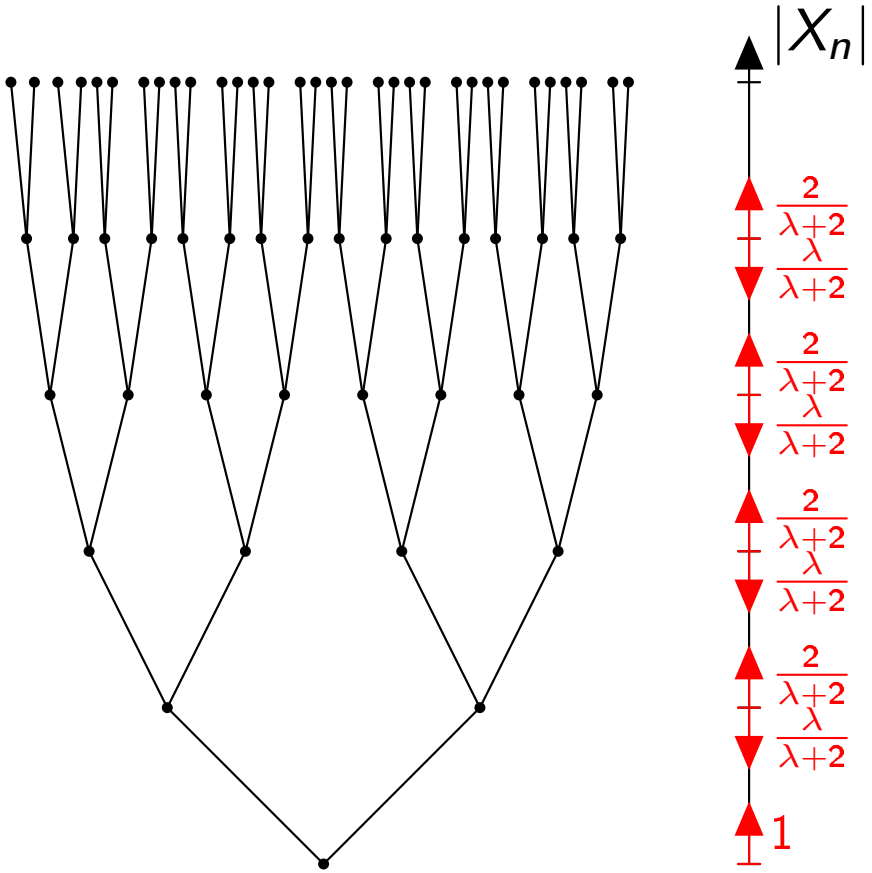
## Un cas particulier

Supposons que $\mathbb{T}$ soit l'arbre binaire.



## Un cas particulier

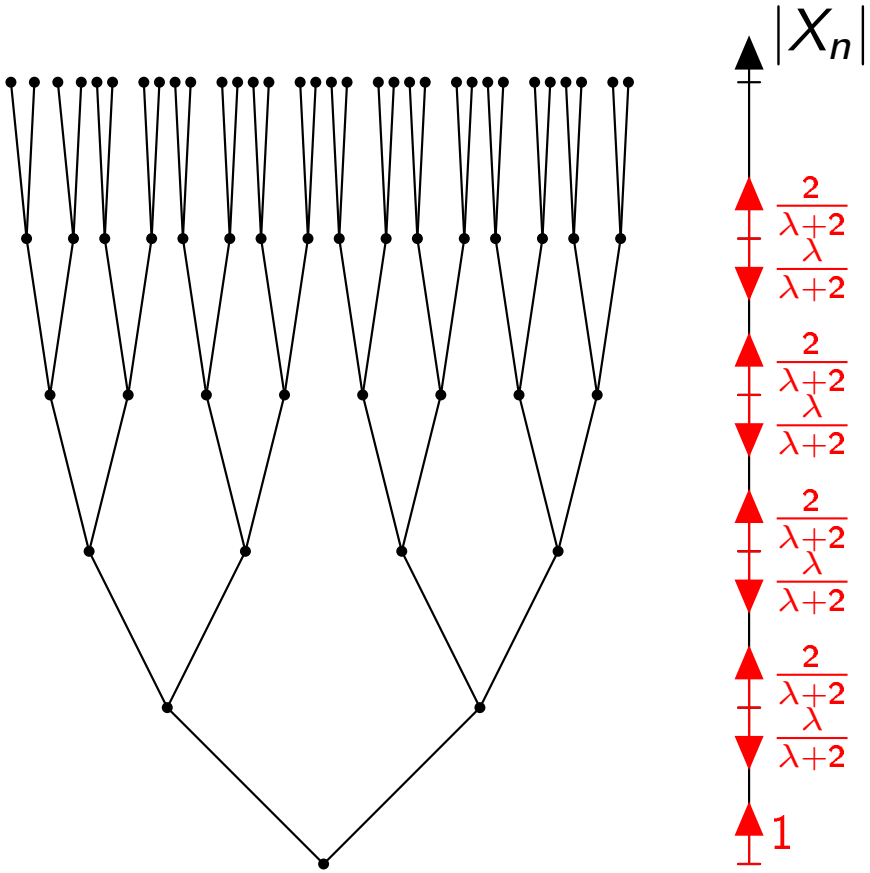
Supposons que $\mathbb{T}$ soit l'arbre binaire.




$(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}_+$.

## Un cas particulier

Supposons que $\mathbb{T}$ soit l'arbre binaire.



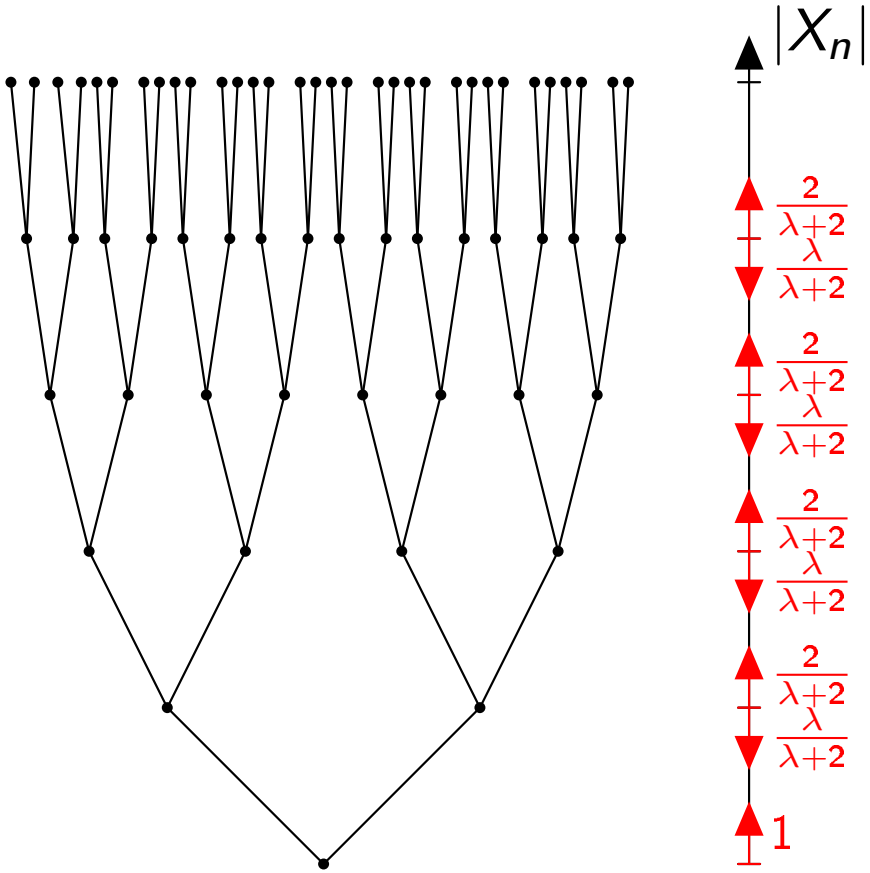

$(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}_+$.

Celle-ci est

- transiente ssi $\lambda < 2$,
- récurrente nulle ssi $\lambda = 2$
- récurrente positive ssi $\lambda > 2$.

## Un cas particulier

Supposons que $\mathbb{T}$ soit l'arbre binaire.




$(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}_+$.

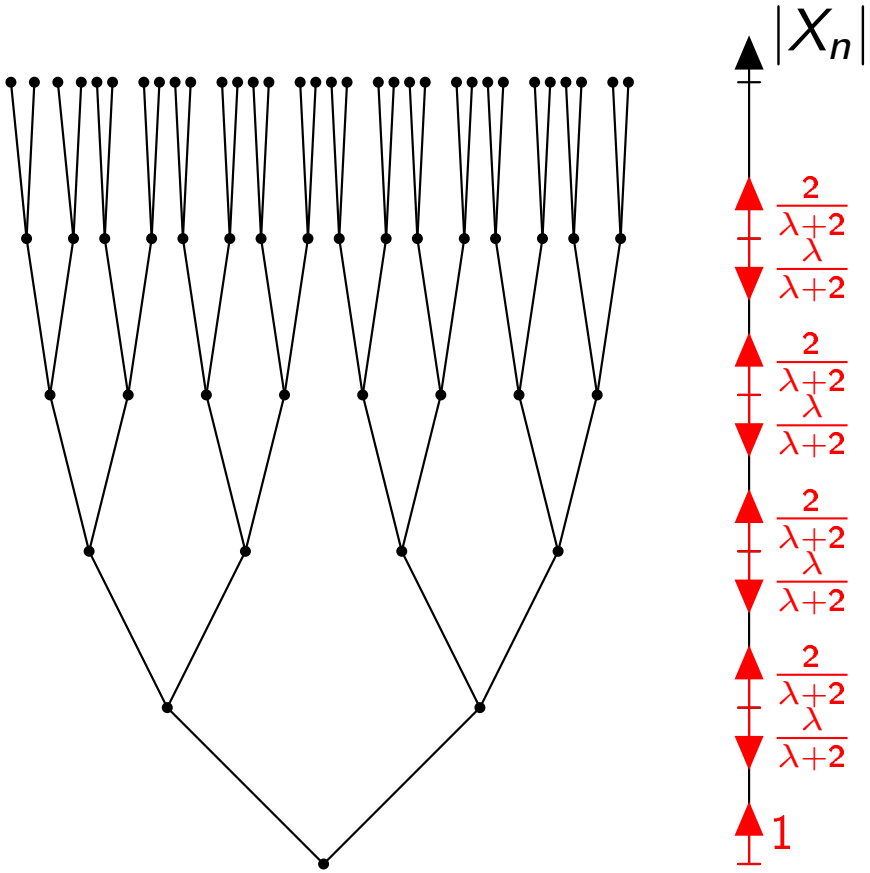
Celle-ci est

- transiente ssi $\lambda < 2$,
- récurrente nulle ssi $\lambda = 2$
- récurrente positive ssi $\lambda > 2$.

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a les mêmes propriétés.

## Un cas particulier

Supposons que $\mathbb{T}$ soit l'arbre binaire.




$(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ est la marche aléatoire simple sur $\mathbb{Z}_+$.

Celle-ci est

- transiente ssi $\lambda < 2$,
- récurrente nulle ssi $\lambda = 2$
- récurrente positive ssi $\lambda > 2$.

$(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ a les mêmes propriétés.

⚠ Attention ! En général, $(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas markovien.

## Marche aléatoire biaisée sur un arbre de Galton-Watson

Soit $\mu$ une loi de reproduction, et $m = \mathbf{E}[\mu]$, $\sigma^2 = Var(\mu)$.

## Marche aléatoire biaisée sur un arbre de Galton-Watson

Soit $\mu$ une loi de reproduction, et $m = \mathbf{E}[\mu]$, $\sigma^2 = Var(\mu)$.Posons $GW_\mu^*$ la loi de l'arbre de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ **conditionné à survivre**.

## Marche aléatoire biaisée sur un arbre de Galton-Watson

Soit $\mu$ une loi de reproduction, et $m = \mathbf{E}[\mu]$, $\sigma^2 = Var(\mu)$.Posons $GW_\mu^*$ la loi de l'arbre de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ **conditionné à survivre**.

## Lyons '90

Si $m > 1$ et $\sigma^2 < +\infty$, alors pour presque tout $GW_\mu^*$ $\mathbb{T}$,

## Marche aléatoire biaisée sur un arbre de Galton-Watson

Soit $\mu$ une loi de reproduction, et $m = \mathbf{E}[\mu]$, $\sigma^2 = Var(\mu)$.Posons $GW_\mu^*$ la loi de l'arbre de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ **conditionné à survivre**.

## Lyons '90

Si $m > 1$ et $\sigma^2 < +\infty$, alors pour presque tout $GW_\mu^*$ $\mathbb{T}$,

- Si $\lambda > m$, alors $(X_n^{\mathbb{T}})_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrent positif.

## Marche aléatoire biaisée sur un arbre de Galton-Watson

Soit $\mu$ une loi de reproduction, et $m = \mathbf{E}[\mu]$, $\sigma^2 = Var(\mu)$.Posons $GW_\mu^*$ la loi de l'arbre de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ **conditionné à survivre**.

## Lyons '90

Si $m > 1$ et $\sigma^2 < +\infty$, alors pour presque tout $GW_\mu^*$ $\mathbb{T}$,

- Si $\lambda > m$, alors $(X_n^{\mathbb{T}})_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrent positif.
- Si $\lambda = m$, alors $(X_n^{\mathbb{T}})_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrent nul.

## Marche aléatoire biaisée sur un arbre de Galton-Watson

Soit $\mu$ une loi de reproduction, et $m = \mathbf{E}[\mu]$, $\sigma^2 = Var(\mu)$.Posons $GW_\mu^*$ la loi de l'arbre de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ **conditionné à survivre**.

## Lyons '90

Si $m > 1$ et $\sigma^2 < +\infty$, alors pour presque tout $GW_\mu^*$ $\mathbb{T}$,

- Si $\lambda > m$, alors $(X_n^{\mathbb{T}})_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrent positif.
- Si $\lambda = m$, alors $(X_n^{\mathbb{T}})_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrent nul.
- Si $\lambda < m$, alors $(X_n^{\mathbb{T}})_{n\in\mathbb{N}}$ est transiente.

## Marche aléatoire biaisée sur un arbre de Galton-Watson

Soit $\mu$ une loi de reproduction, et $m = \mathbf{E}[\mu]$, $\sigma^2 = Var(\mu)$.Posons $GW_\mu^*$ la loi de l'arbre de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ **conditionné à survivre**.

## Lyons '90

Si $m > 1$ et $\sigma^2 < +\infty$, alors pour presque tout $GW_\mu^*$ $\mathbb{T}$,

- Si $\lambda > m$, alors $(X_n^{\mathbb{T}})_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrent positif.
- Si $\lambda = m$, alors $(X_n^{\mathbb{T}})_{n\in\mathbb{N}}$ est récurrent nul.
- Si $\lambda < m$, alors $(X_n^{\mathbb{T}})_{n\in\mathbb{N}}$ est transiente.

Nous allons nous intéresser au cas $\lambda = m$

Y. Peres et O. Zeitouni ont établi le TCL suivant :

Y. Peres et O. Zeitouni ont établi le TCL suivant :

## Peres & Zeitouni '06

Soit $\mu$ une loi de reproduction telle que $\mu(0) = 0$ et $\sigma^2 < +\infty$.

Y. Peres et O. Zeitouni ont établi le TCL suivant :

## Peres & Zeitouni '06

Soit $\mu$ une loi de reproduction telle que $\mu(0) = 0$ et $\sigma^2 < +\infty$.
Alors il existe une constante explicite $\Sigma > 0$ telle que, pour $\mu$-presque tout arbre de GW $\mathbb{T}$, sous $\mathbf{P}_\lambda$,

Y. Peres et O. Zeitouni ont établi le TCL suivant :

## Peres & Zeitouni '06

Soit $\mu$ une loi de reproduction telle que $\mu(0) = 0$ et $\sigma^2 < +\infty$.
Alors il existe une constante explicite $\Sigma > 0$ telle que, pour $\mu$-presque tout arbre de GW $\mathbb{T}$, sous $\mathbf{P}_\lambda$,

$$\left( \frac{|X^{\mathbb{T}}_{\lfloor nt \rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0 \right) \underset{n \to \infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \left( \frac{2}{\Sigma} |B_t|, t \geq 0 \right)$$

Y. Peres et O. Zeitouni ont établi le TCL suivant :

## Peres & Zeitouni '06

Soit $\mu$ une loi de reproduction telle que $\mu(0) = 0$ et $\sigma^2 < +\infty$.
Alors il existe une constante explicite $\Sigma > 0$ telle que, pour $\mu$-presque tout arbre de GW $\mathbb{T}$, sous $\mathbf{P}_\lambda$,

$$\left( \frac{|X^{\mathbb{T}}_{\lfloor nt \rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0 \right) \underset{n \to \infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \left( \frac{2}{\Sigma} |B_t|, t \geq 0 \right)$$

où $B$ est un mouvement brownien standard, et où la convergence a lieu pour la topologie de Skorokhod dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ l'espace des fonctions càdlàg.

Illustration de

$$\left(\frac{|X_{\lfloor nt \rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(\frac{2}{\sigma_0}|B_t|, t \geq 0\right)$$

Illustration de

$$\left(\frac{|X_{\lfloor nt \rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(\frac{2}{\sigma_0}|B_t|, t \geq 0\right)$$

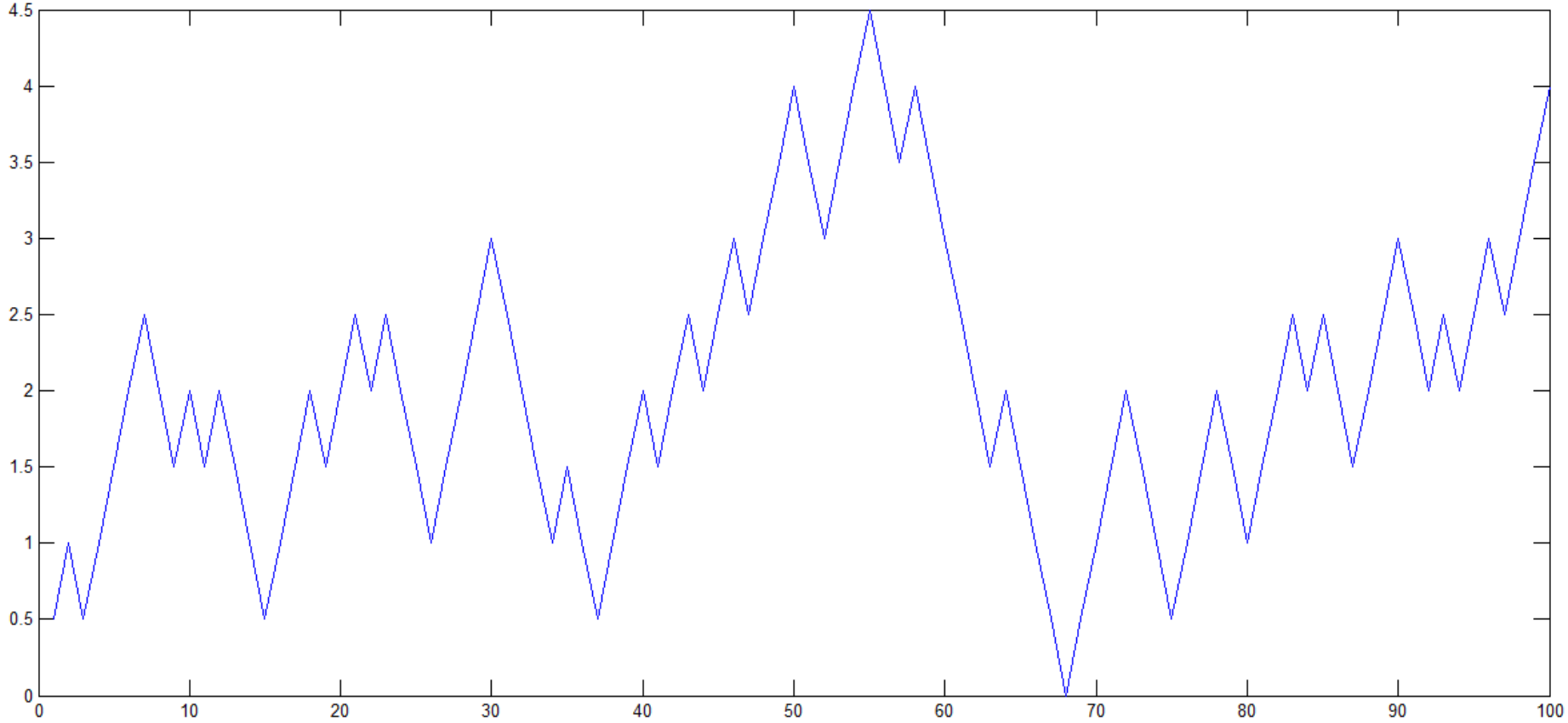


Illustration de

$$\left(\frac{|X_{\lfloor nt \rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(\frac{2}{\sigma_0}|B_t|, t \geq 0\right)$$

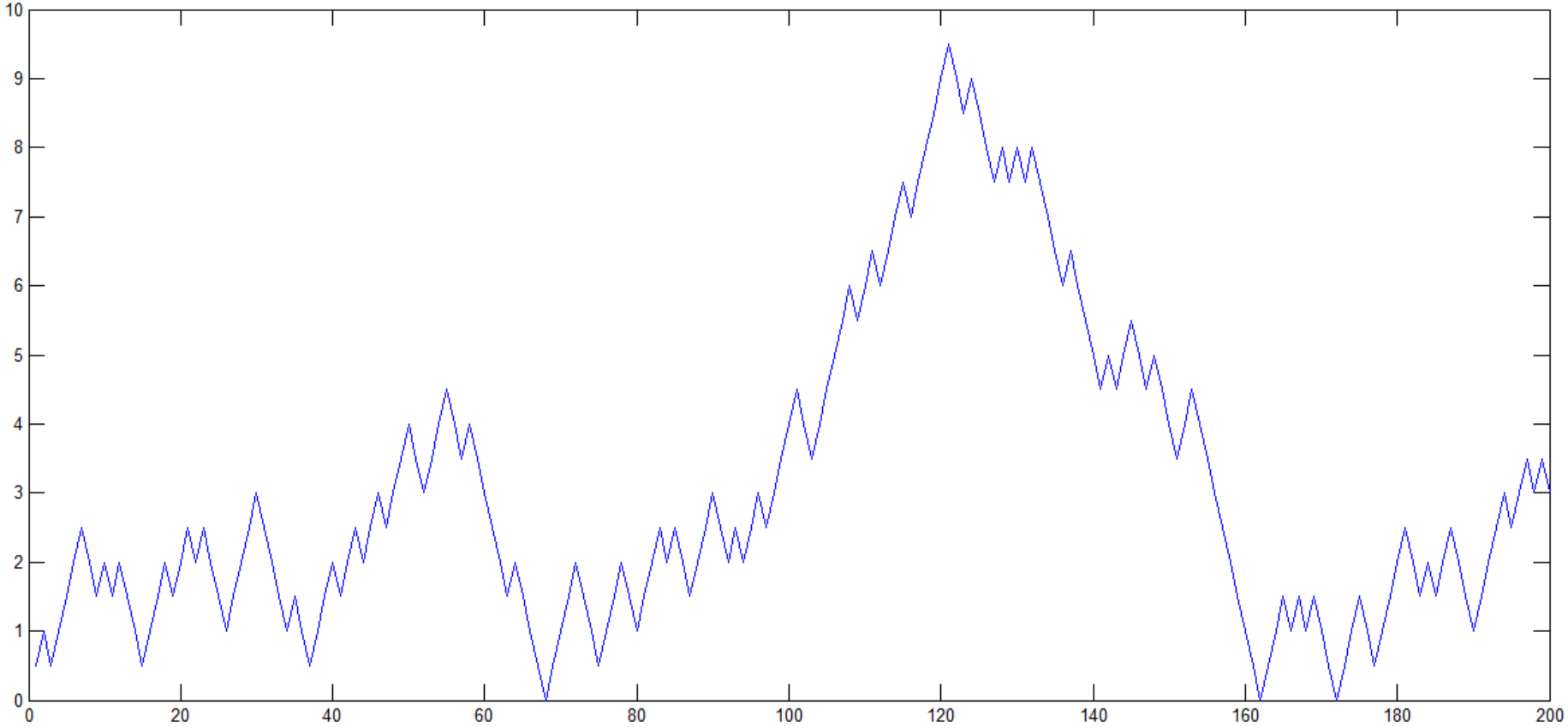


Illustration de

$$\left(\frac{|X_{\lfloor nt \rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(\frac{2}{\sigma_0}|B_t|, t \geq 0\right)$$

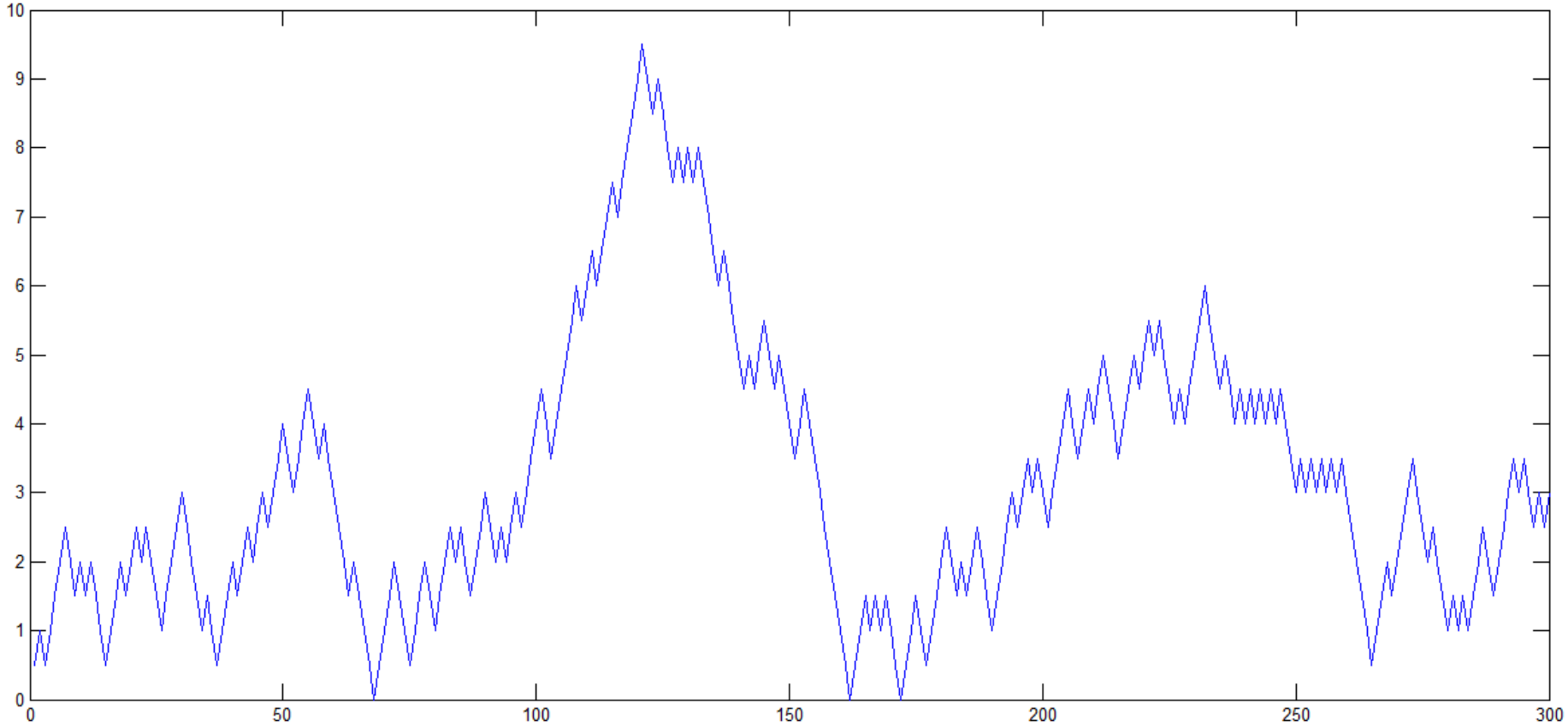


Illustration de

$$\left(\frac{|X_{\lfloor nt \rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0\right) \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \left(\frac{2}{\sigma_0}|B_t|, t \geq 0\right)$$

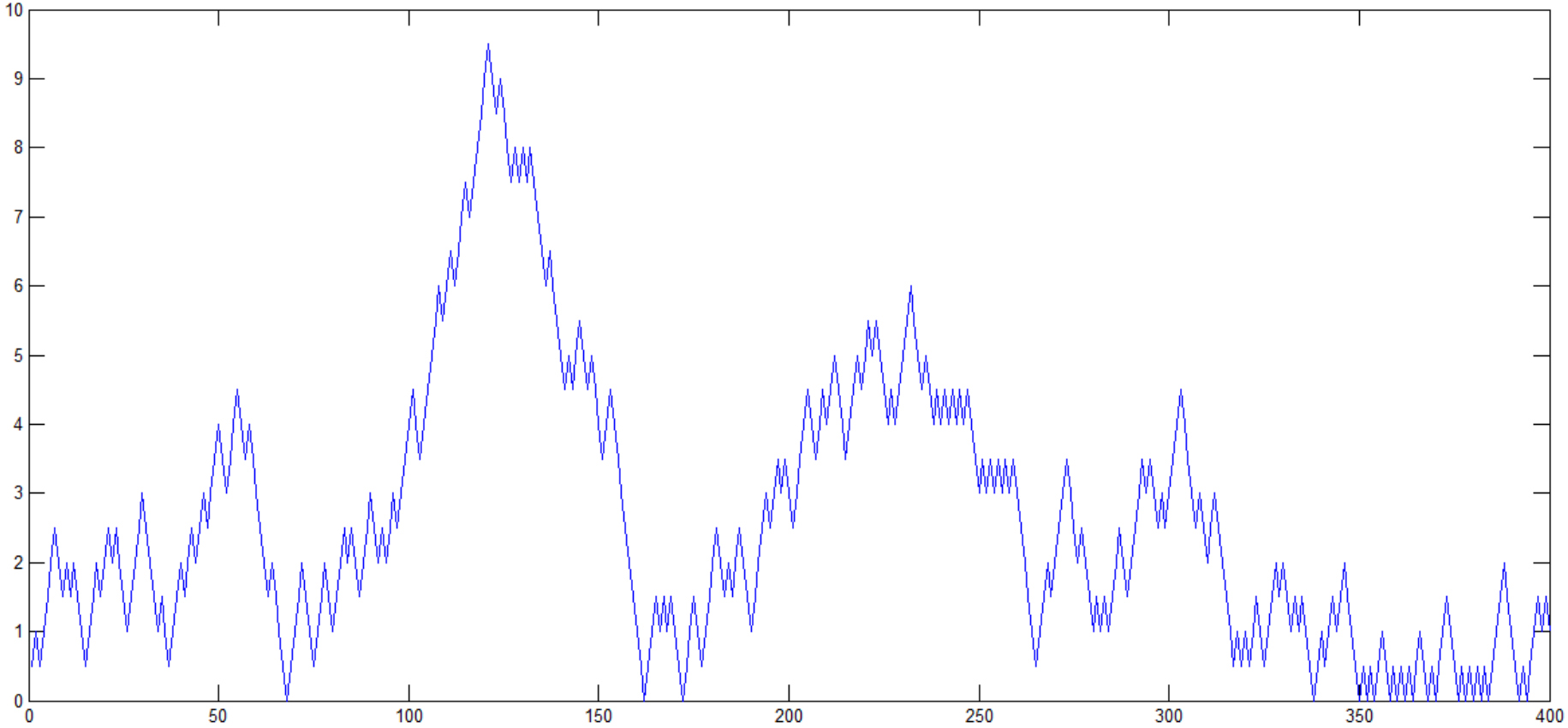


Illustration de

$$\left(\frac{|X_{\lfloor nt \rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(\frac{2}{\sigma_0}|B_t|, t \geq 0\right)$$

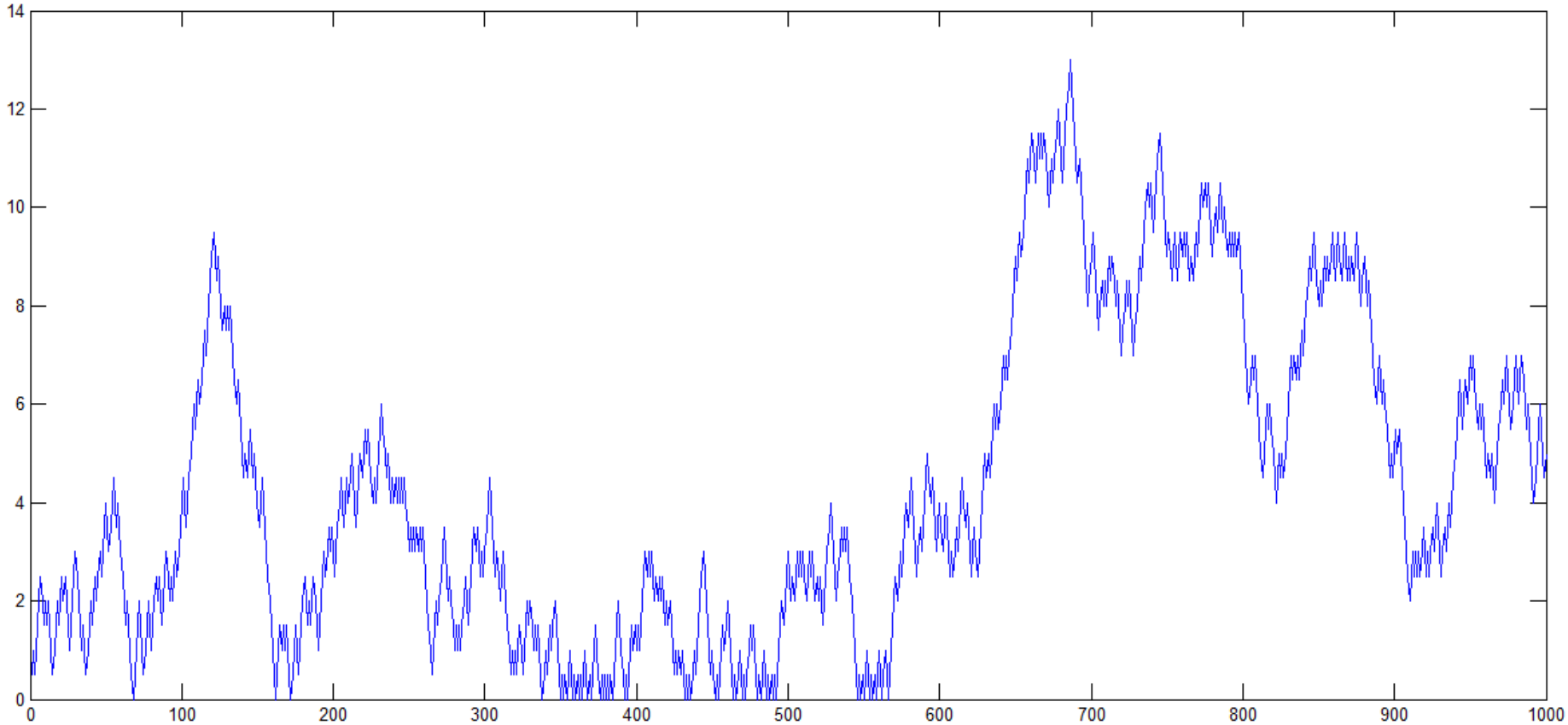


Illustration de

$$\left(\frac{|X_{\lfloor nt \rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(\frac{2}{\sigma_0}|B_t|, t \geq 0\right)$$

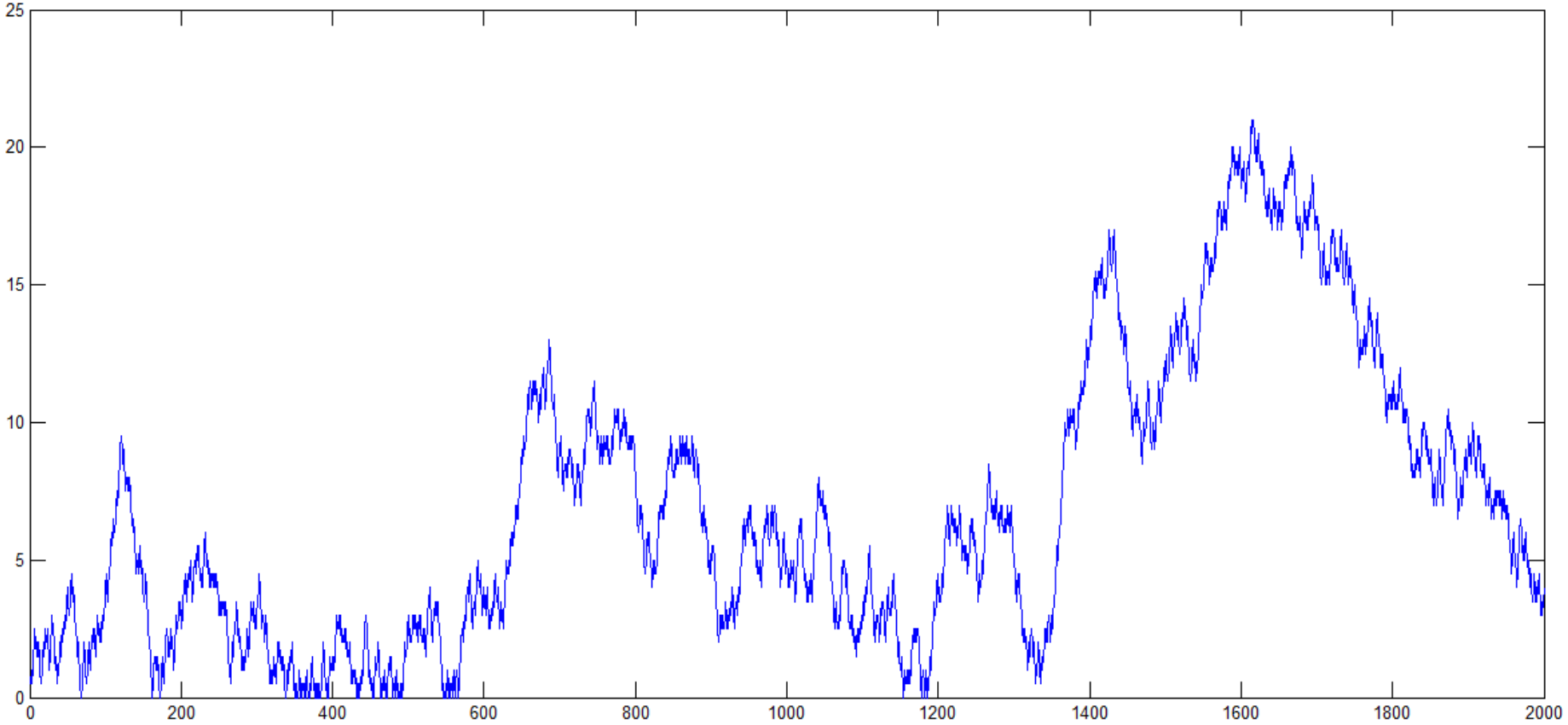


Illustration de

$$\left(\frac{|X_{\lfloor nt \rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(\frac{2}{\sigma_0}|B_t|, t \geq 0\right)$$

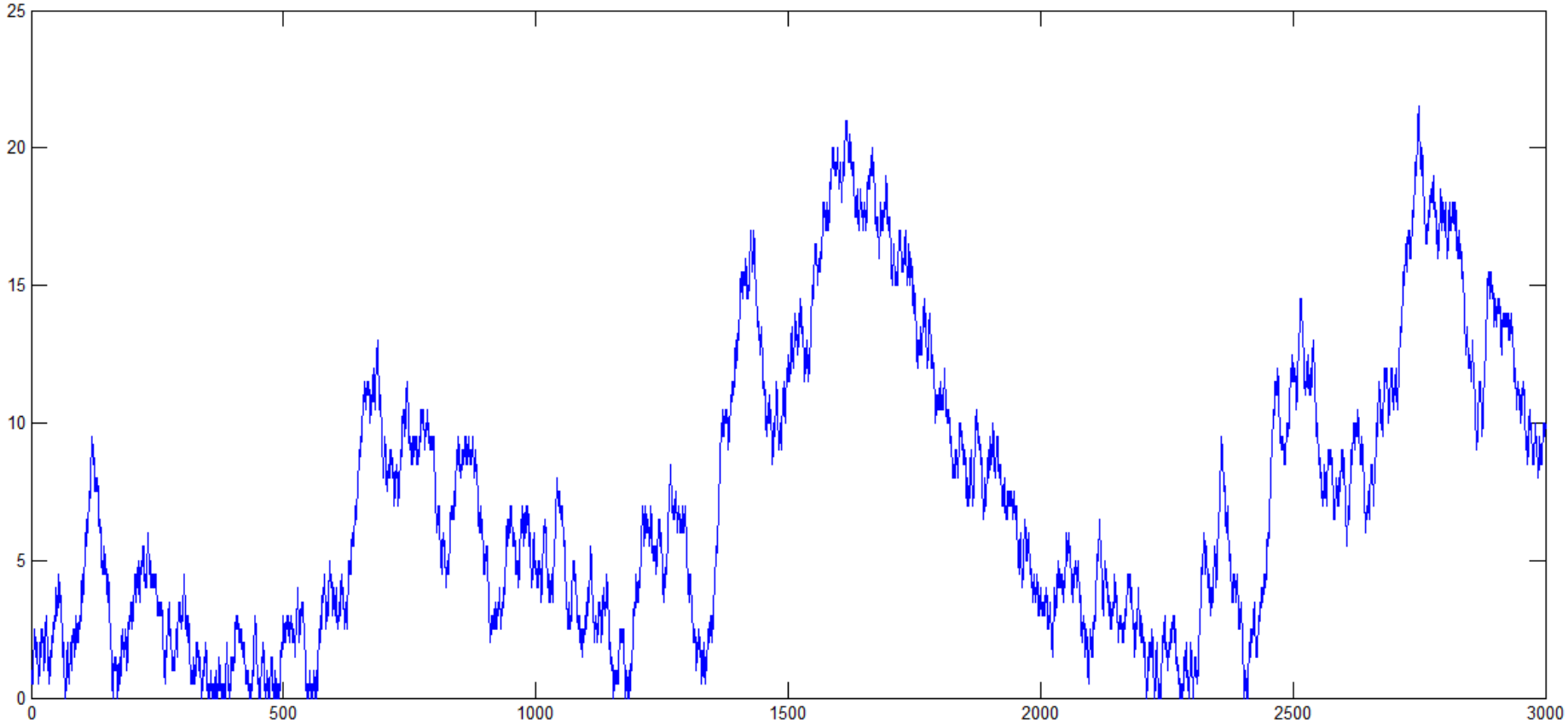


Illustration de

$$\left(\frac{|X_{\lfloor nt \rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0\right) \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \left(\frac{2}{\sigma_0}|B_t|, t \geq 0\right)$$

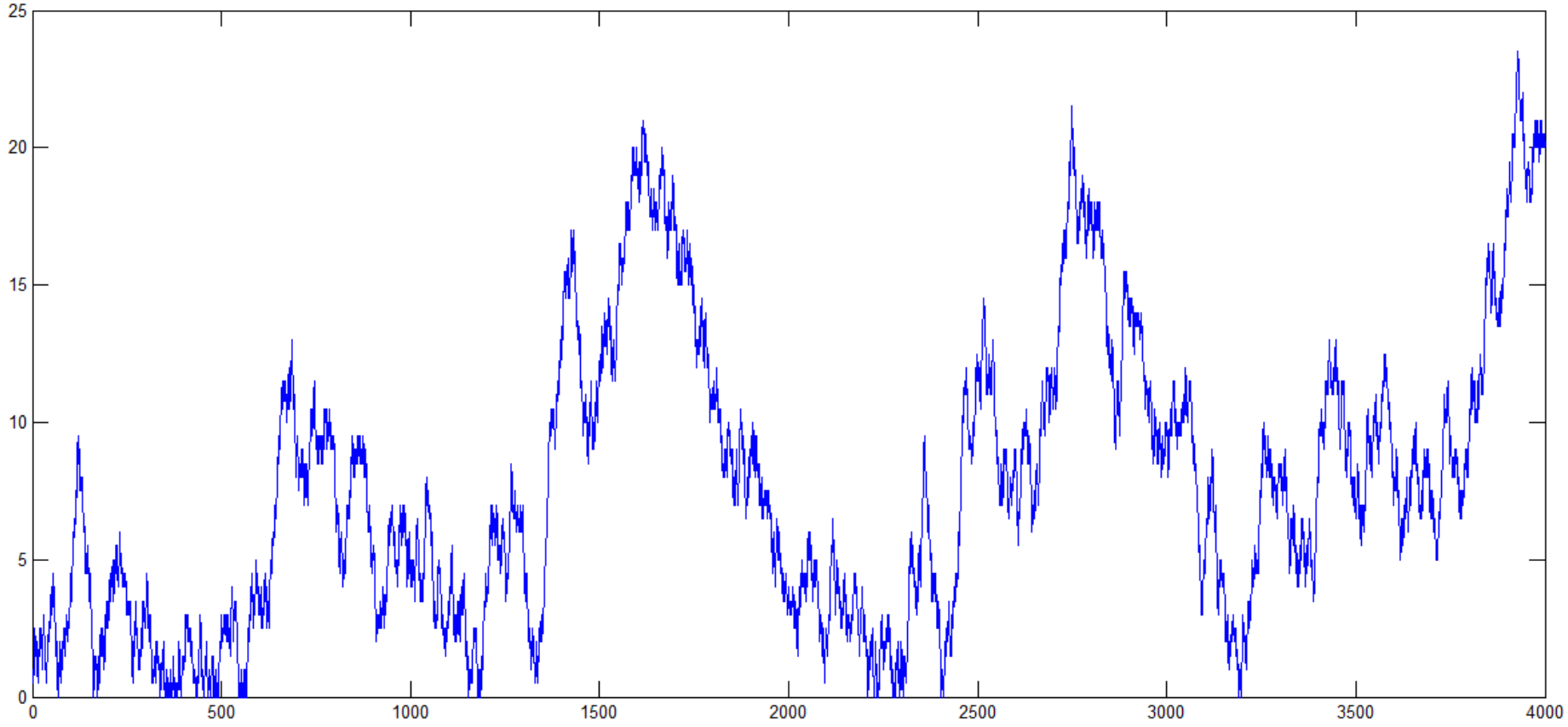


Illustration de

$$\left(\frac{|X_{\lfloor nt \rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0\right) \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \left(\frac{2}{\sigma_0}|B_t|, t \geq 0\right)$$

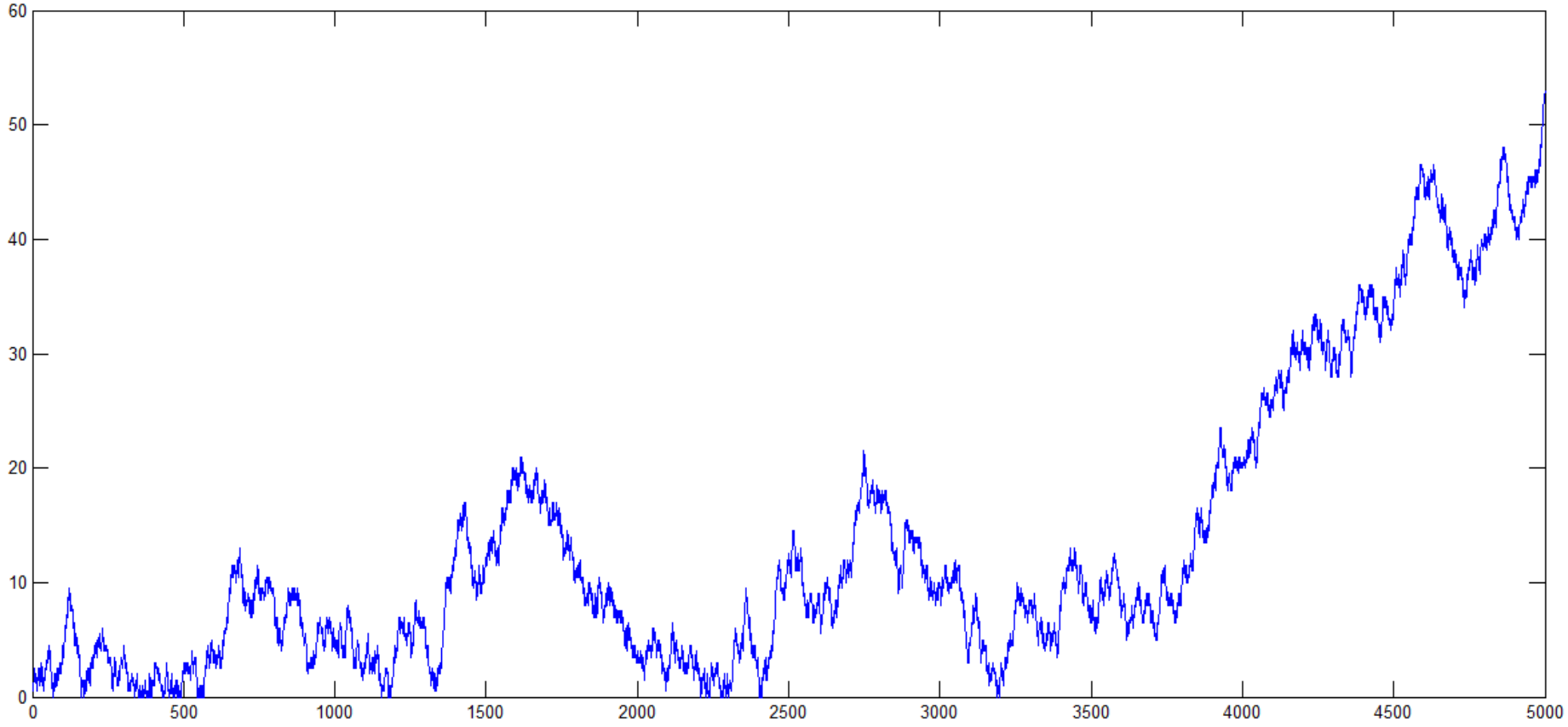


Illustration de

$$\left(\frac{|X_{\lfloor nt \rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0\right) \underset{n\to\infty}{\overset{d}{\longrightarrow}} \left(\frac{2}{\sigma_0}|B_t|, t \geq 0\right)$$

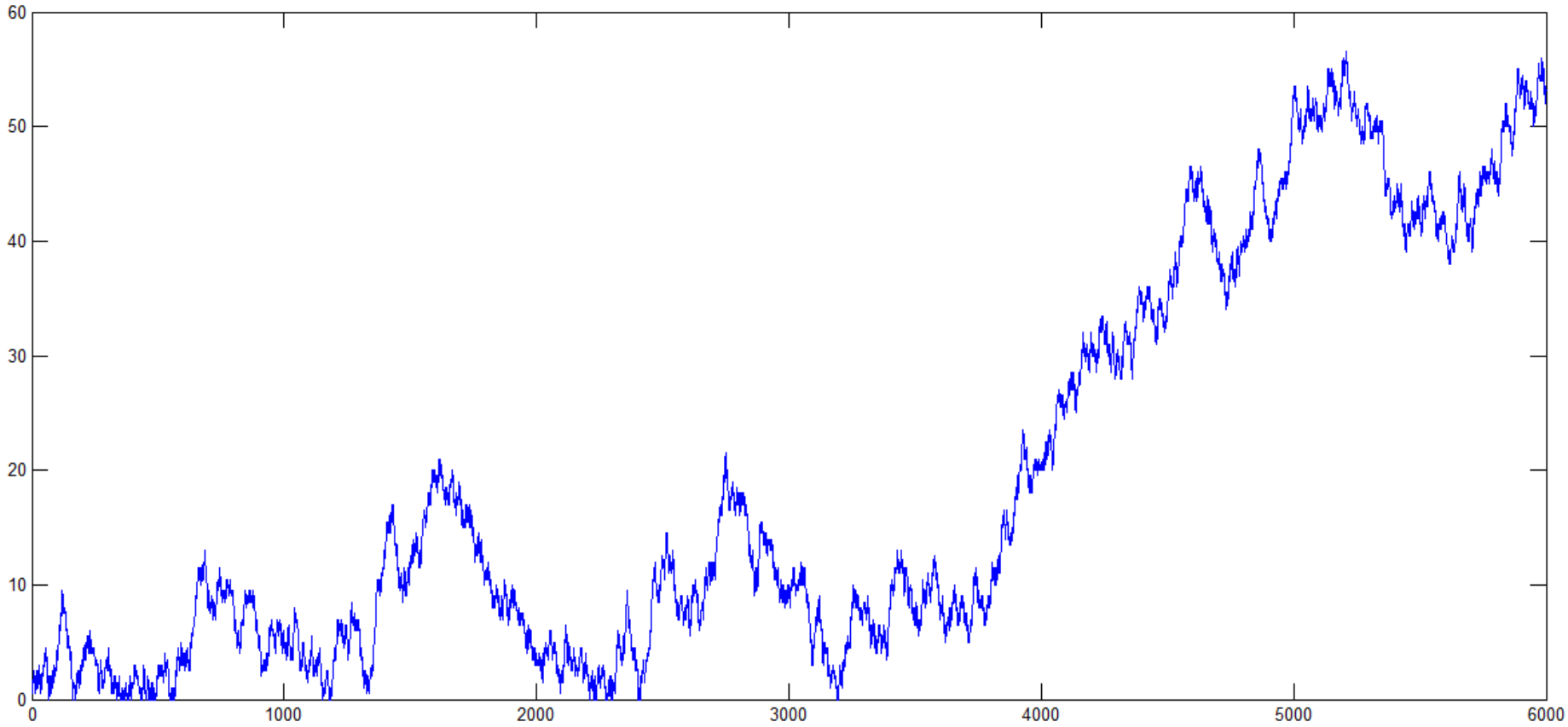


Illustration de

$$\left(\frac{|X_{\lfloor nt \rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(\frac{2}{\sigma_0}|B_t|, t \geq 0\right)$$

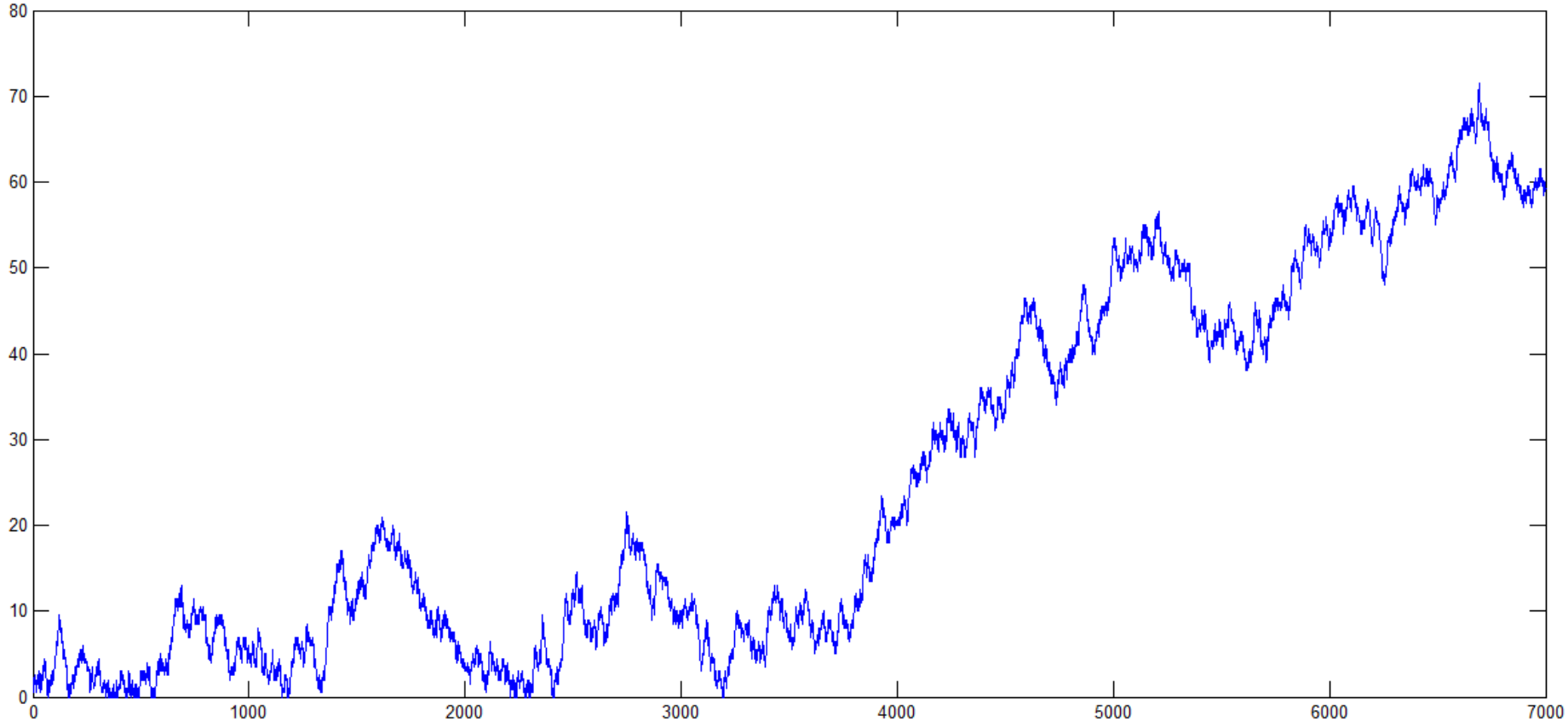
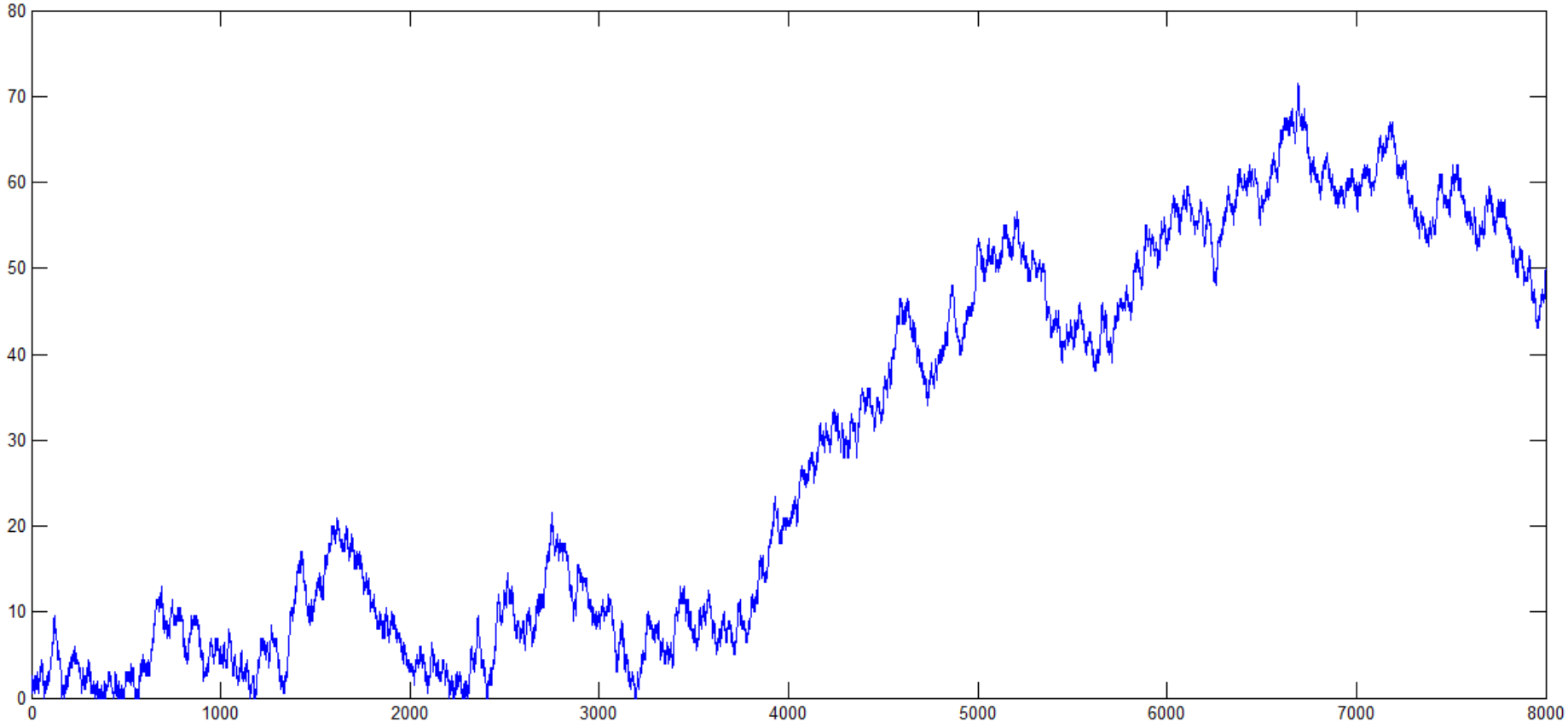


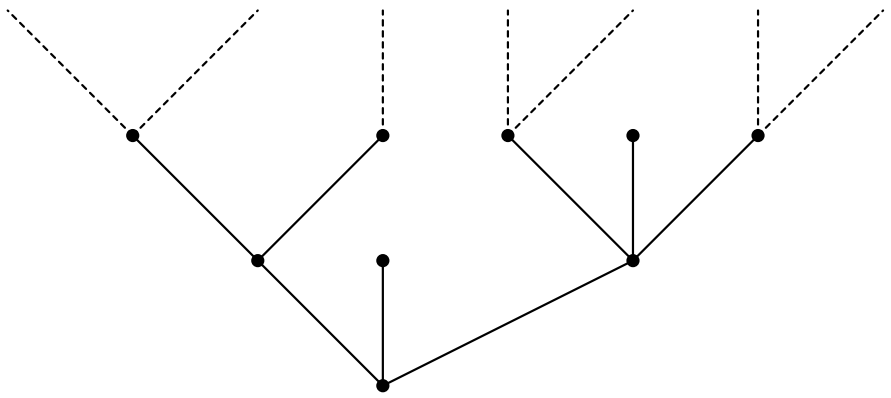
Illustration de

$$\left(\frac{|X_{\lfloor nt \rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(\frac{2}{\sigma_0}|B_t|, t \geq 0\right)$$



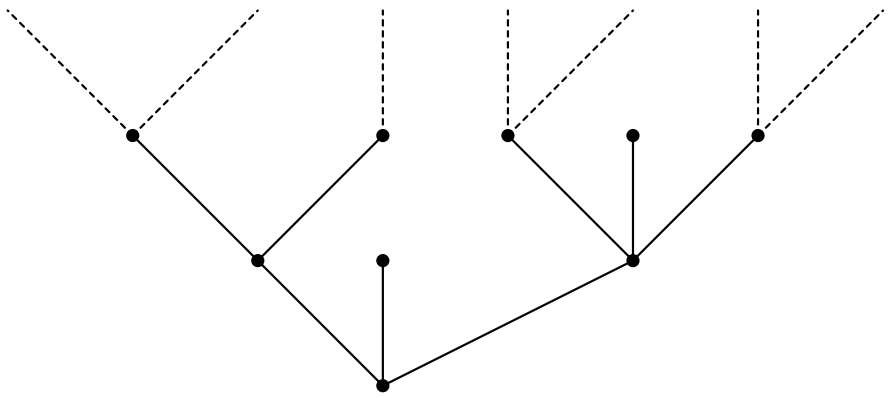
Ce théorème a été étendu à un modèle plus large en 2008 par G. Faraud :

Ce théorème a été étendu à un modèle plus large en 2008 par G. Faraud :



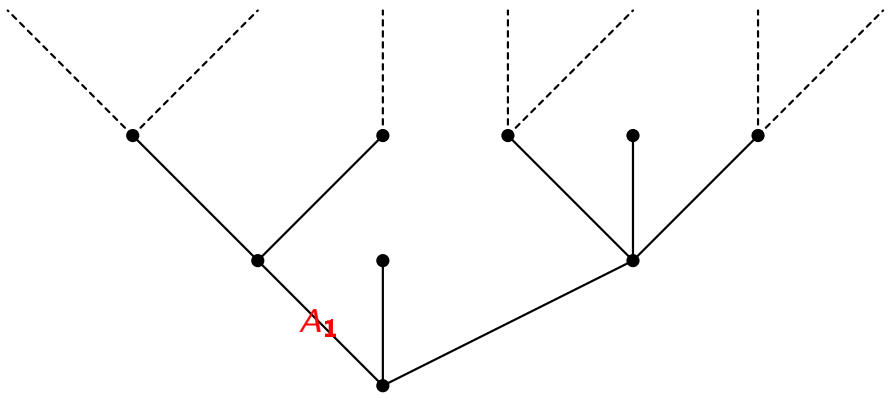
- Soit $\mathbb{T}$ un arbre de GW surcritique conditionné à survivre

Ce théorème a été étendu à un modèle plus large en 2008 par G. Faraud :



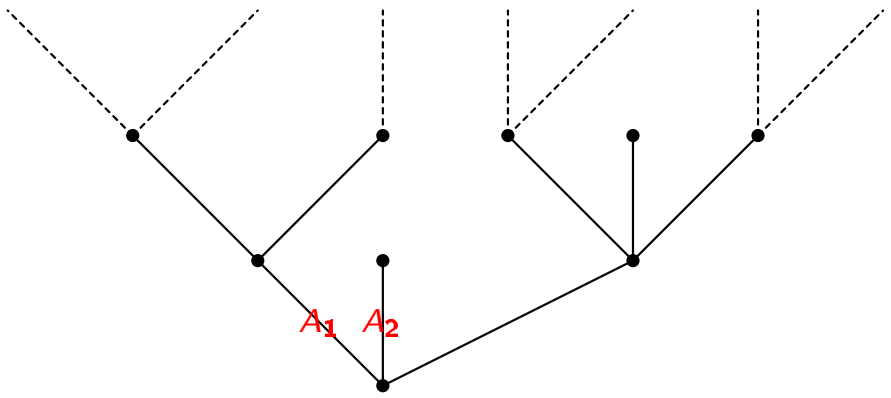
- Soit $\mathbb{T}$ un arbre de GW surcritique conditionné à survivre
- $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{E}[A] = \frac{1}{m}$

Ce théorème a été étendu à un modèle plus large en 2008 par G. Faraud :



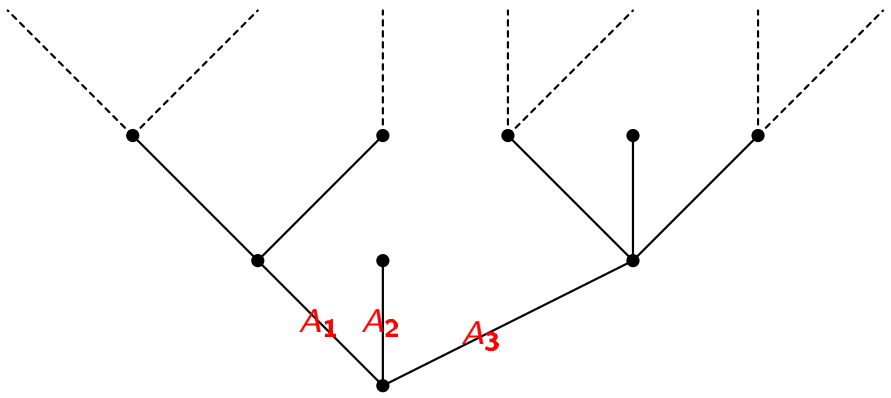

- Soit $\mathbb{T}$ un arbre de GW surcritique conditionné à survivre
- $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{E}[A] = \frac{1}{m}$

Ce théorème a été étendu à un modèle plus large en 2008 par G. Faraud :



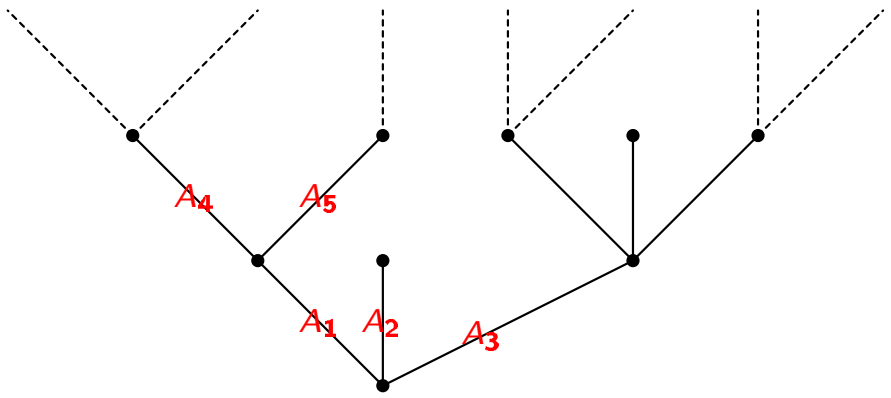

- Soit $\mathbb{T}$ un arbre de GW surcritique conditionné à survivre
- $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{E}[A] = \frac{1}{m}$

Ce théorème a été étendu à un modèle plus large en 2008 par G. Faraud :



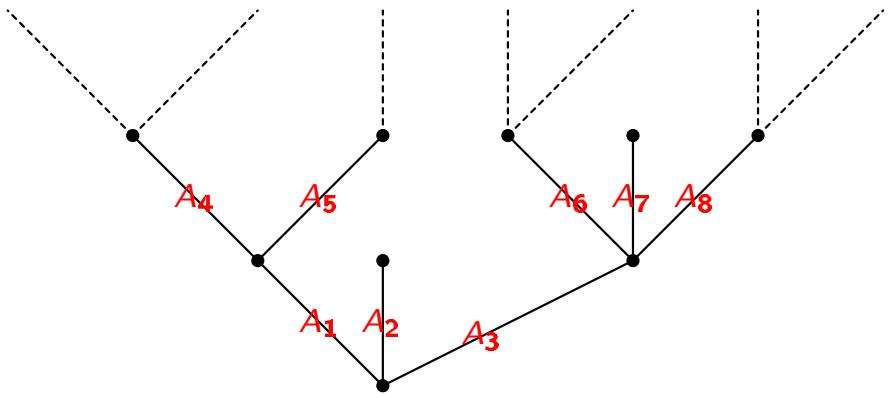

- Soit $\mathbb{T}$ un arbre de GW surcritique conditionné à survivre
- $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{E}[A] = \frac{1}{m}$

Ce théorème a été étendu à un modèle plus large en 2008 par G. Faraud :



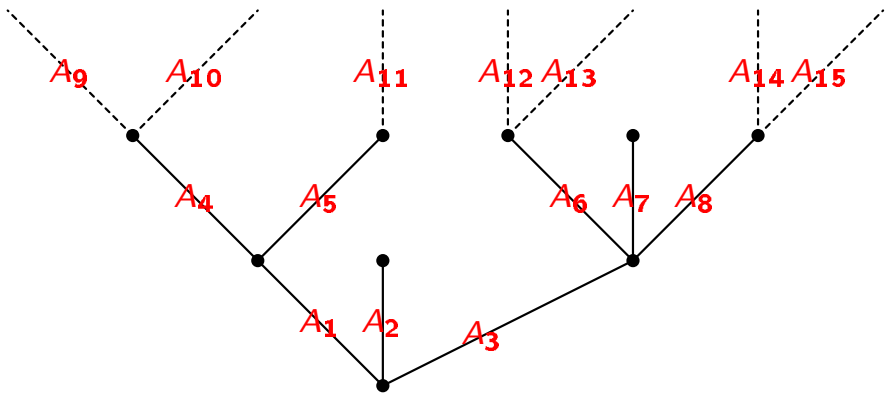

- Soit $\mathbb{T}$ un arbre de GW surcritique conditionné à survivre
- $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{E}[A] = \frac{1}{m}$

Ce théorème a été étendu à un modèle plus large en 2008 par G. Faraud :



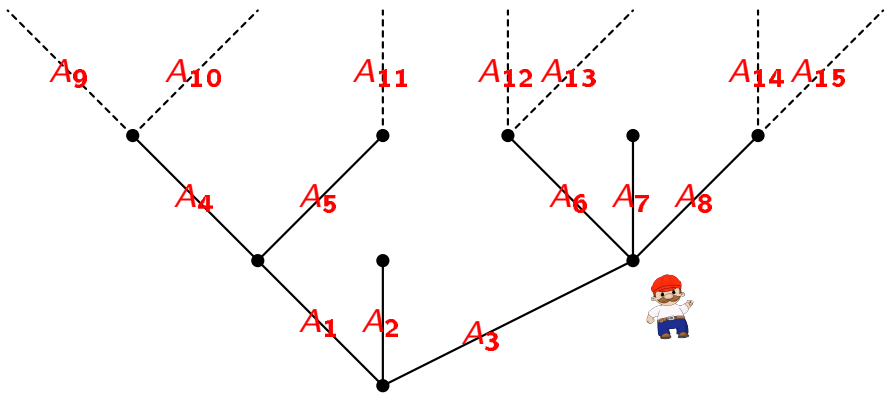

- Soit $\mathbb{T}$ un arbre de GW surcritique conditionné à survivre
- $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{E}[A] = \frac{1}{m}$

Ce théorème a été étendu à un modèle plus large en 2008 par G. Faraud :



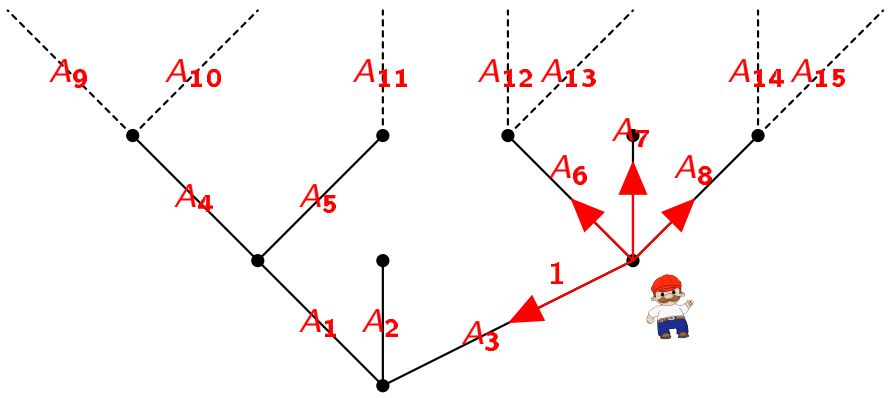

- Soit $\mathbb{T}$ un arbre de GW surcritique conditionné à survivre
- $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{E}[A] = \frac{1}{m}$

Ce théorème a été étendu à un modèle plus large en 2008 par G. Faraud :



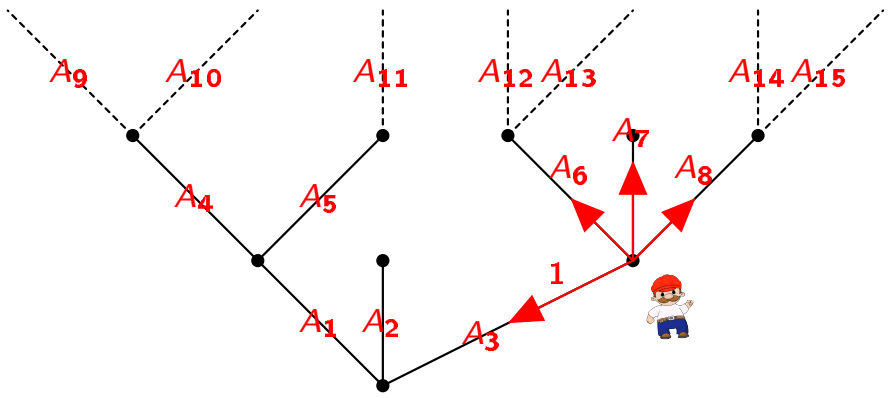

- Soit $\mathbb{T}$ un arbre de GW surcritique conditionné à survivre
- $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{E}[A] = \frac{1}{m}$
- Les probabilités de transition sont proportionnelles à $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$

Ce théorème a été étendu à un modèle plus large en 2008 par G. Faraud :



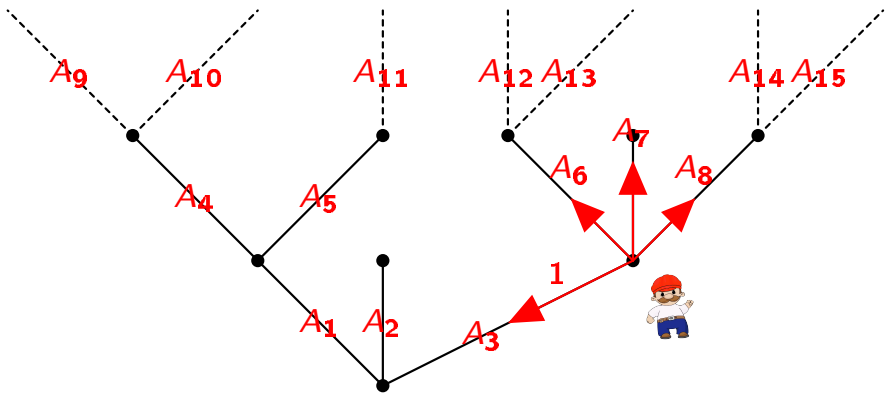

- Soit $\mathbb{T}$ un arbre de GW surcritique conditionné à survivre
- $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{E}[A] = \frac{1}{m}$
- Les probabilités de transition sont proportionnelles à $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$

Ce théorème a été étendu à un modèle plus large en 2008 par G. Faraud :




- Soit $\mathbb{T}$ un arbre de GW surcritique conditionné à survivre
- $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{E}[A] = \frac{1}{m}$
- Les probabilités de transition sont proportionnelles à $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$ (cas $\lambda$-biaisé : $A_i = \frac{1}{m}$ p.s.)

Ce théorème a été étendu à un modèle plus large en 2008 par G. Faraud :

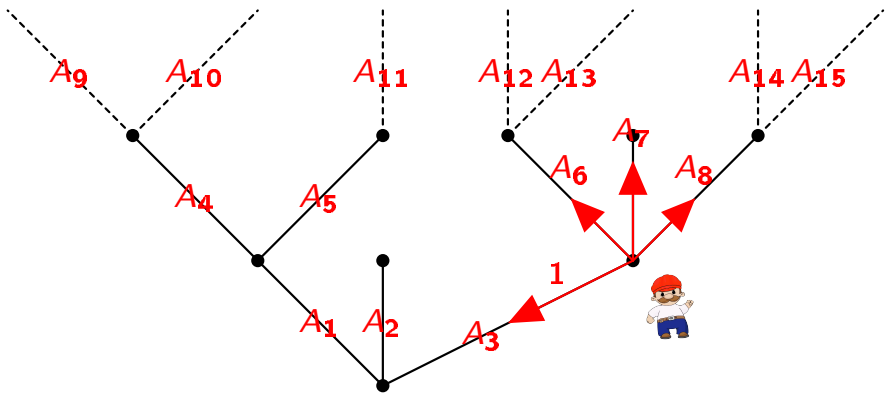



- Soit $\mathbb{T}$ un arbre de GW surcritique conditionné à survivre
- $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{E}[A] = \frac{1}{m}$
- Les probabilités de transition sont proportionnelles à $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$ (cas $\lambda$-biaisé : $A_i = \frac{1}{m}$ p.s.)

## Faraud '08

Supposons que $\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N(\emptyset)} A_i^8\right] < 1$ (resp. $\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N(\emptyset)} A_i^5\right] < 1$) .
Alors il existe une constante explicite $\Sigma > 0$ telle que, pour $\mu$-presque tout arbre de GW $\mathbb{T}$, under $\mathbf{P}_\lambda$ (resp. under $\mathbf{P}_{\lambda, GW_\mu^*}$)

Ce théorème a été étendu à un modèle plus large en 2008 par G. Faraud :



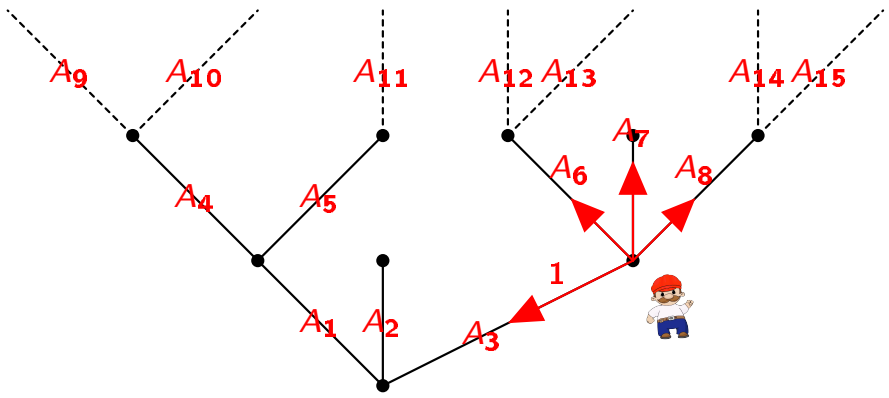

- Soit $\mathbb{T}$ un arbre de GW surcritique conditionné à survivre
- $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{E}[A] = \frac{1}{m}$
- Les probabilités de transition sont proportionnelles à $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$ (cas $\lambda$-biaisé : $A_i = \frac{1}{m}$ p.s.)

## Faraud '08

Supposons que $\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N(\emptyset)} A_i^8\right] < 1$ (resp. $\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N(\emptyset)} A_i^5\right] < 1$) .
Alors il existe une constante explicite $\Sigma > 0$ telle que, pour $\mu$-presque tout arbre de GW $\mathbb{T}$, under $\mathbf{P}_\lambda$ (resp. under $\mathbf{P}_{\lambda, GW_\mu^*}$)

$$\left(\frac{|X^{\mathbb{T}}_{\lfloor nt\rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(\frac{2}{\Sigma}|B_t|, t \geq 0\right)$$

Ce théorème a été étendu à un modèle plus large en 2008 par G. Faraud :




- Soit $\mathbb{T}$ un arbre de GW surcritique conditionné à survivre
- $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$ des variables aléatoires i.i.d. telles que $\mathbf{E}[A] = \frac{1}{m}$
- Les probabilités de transition sont proportionnelles à $(A_x)_{x\in\mathbb{T}}$ (cas $\lambda$-biaisé : $A_i = \frac{1}{m}$ p.s.)

## Faraud '08

Supposons que $\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N(\emptyset)} A_i^8\right] < 1$ (resp. $\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N(\emptyset)} A_i^5\right] < 1$) .
Alors il existe une constante explicite $\Sigma > 0$ telle que, pour $\mu$-presque tout arbre de GW $\mathbb{T}$, under $\mathbf{P}_\lambda$ (resp. under $\mathbf{P}_{\lambda, GW_\mu^*}$)

$$\left(\frac{|X^{\mathbb{T}}_{\lfloor nt\rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(\frac{2}{\Sigma}|B_t|, t \geq 0\right)$$

pour la topologie de Skorokhod sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Nous proposons une méthode pour démontrer ces théorèmes sous des conditions optimales, méthode basée sur **la trace** de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Nous proposons une méthode pour démontrer ces théorèmes sous des conditions optimales, méthode basée sur **la trace** de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Afin de pouvoir observer ce qu'est la trace de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notre marcheur doit revêtir son habit de peintre :

Nous proposons une méthode pour démontrer ces théorèmes sous des conditions optimales, méthode basée sur **la trace** de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Afin de pouvoir observer ce qu'est la trace de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notre marcheur doit revêtir son habit de peintre :

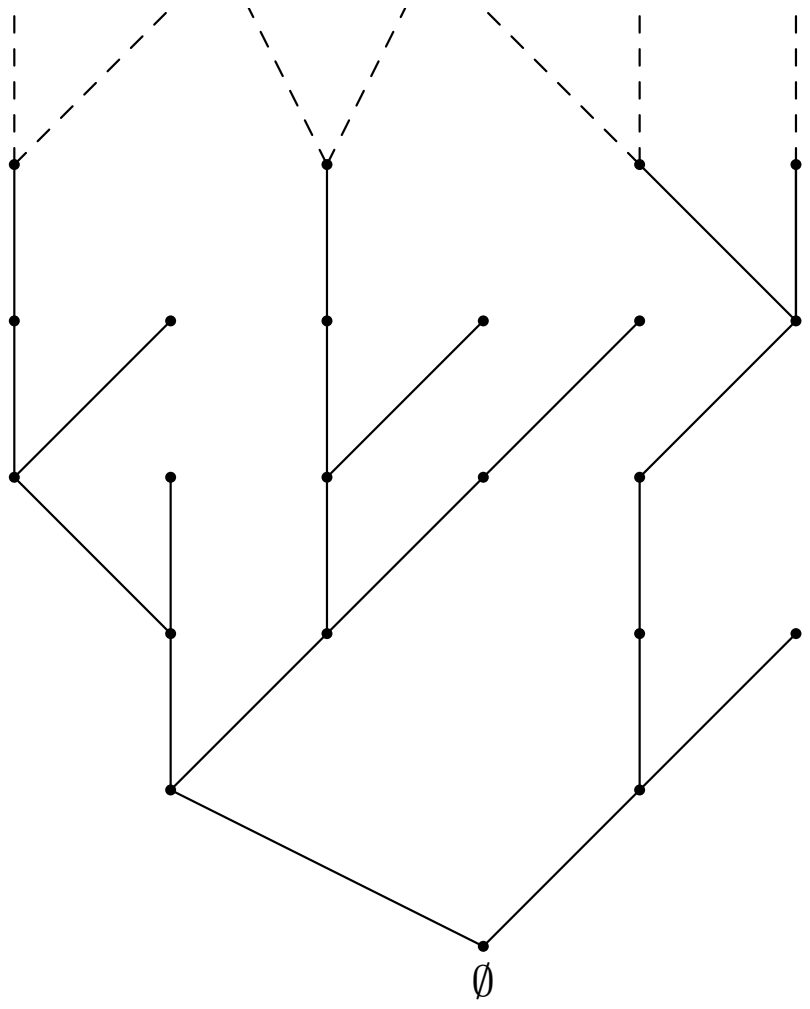
Nous proposons une méthode pour démontrer ces théorèmes sous des conditions optimales, méthode basée sur **la trace** de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Afin de pouvoir observer ce qu'est la trace de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, notre marcheur doit revêtir son habit de peintre :

$\mathcal{T}^n$ (trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'au temps $n$) :

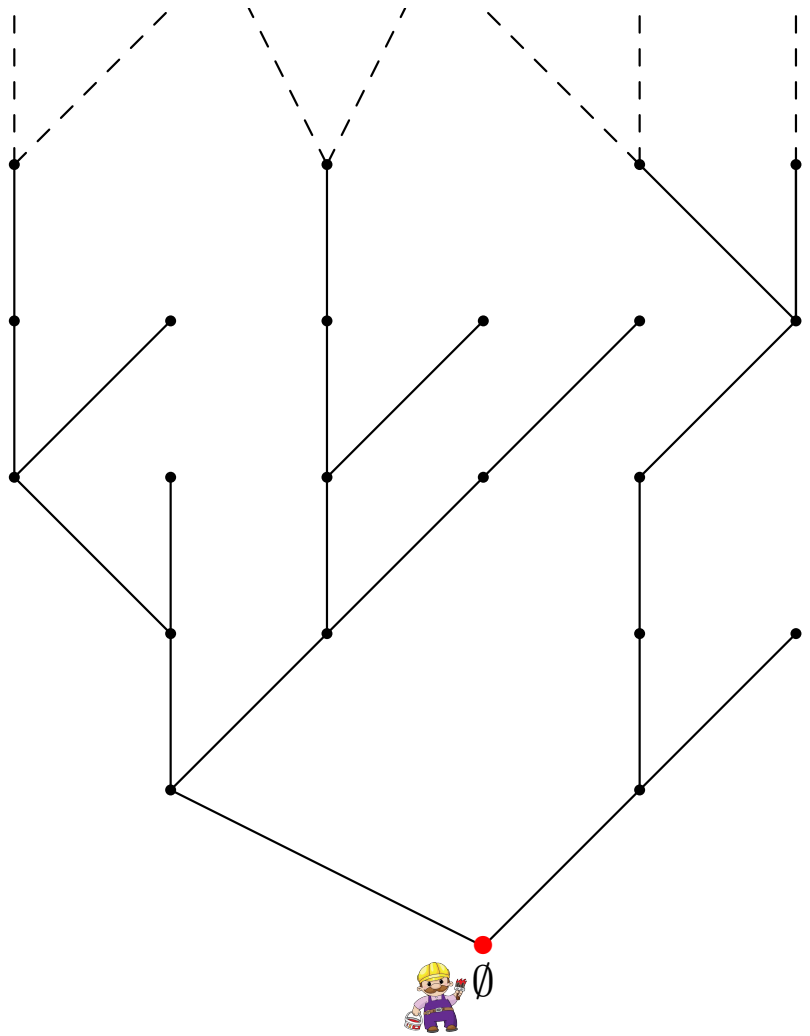
$\mathcal{T}^n$ (trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'au temps $n$) : arbre constitué des sommets de $\mathbb{T}$ visités par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avant le temps $n$.

$\mathcal{T}^n$ (trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'au temps $n$) : arbre constitué des sommets de $\mathbb{T}$ visités par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avant le temps $n$.
$\mathcal{T}^n := \{x \in \mathbb{T} \mid \exists k \leq n, X_k = x\}$.

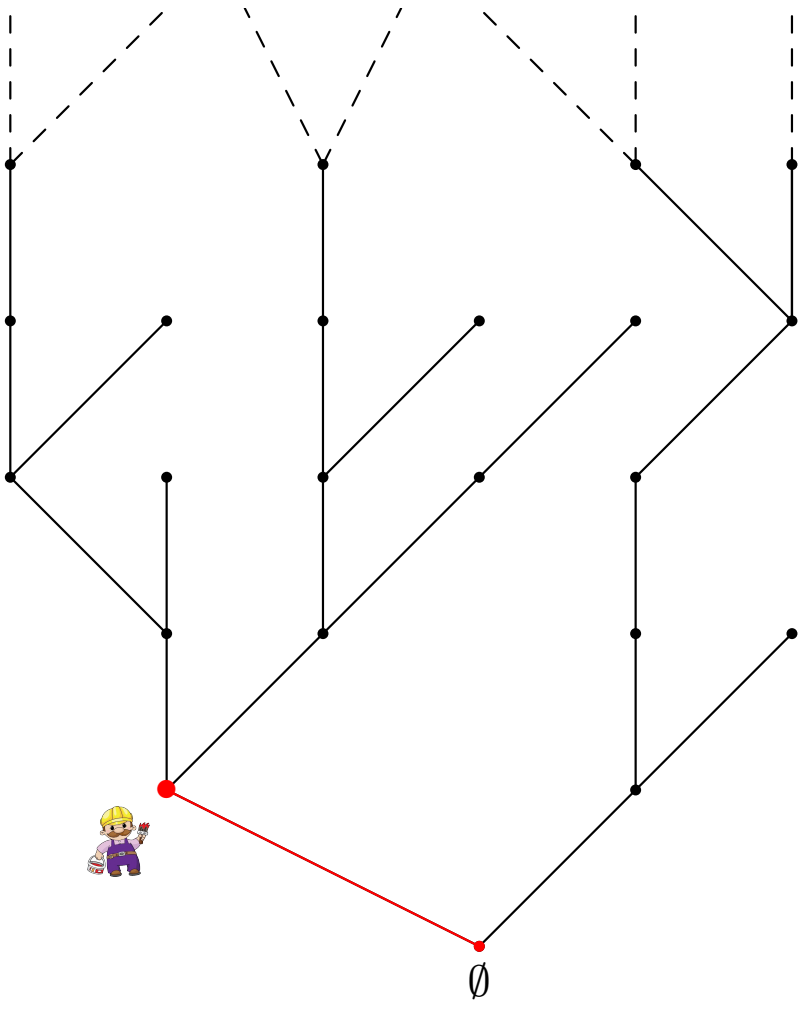
$\mathcal{T}^n$ (trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'au temps $n$) : arbre constitué des sommets de $\mathbb{T}$ visités par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avant le temps $n$.
$\mathcal{T}^n := \{x \in \mathbb{T} \mid \exists k \leq n, X_k = x\}$.



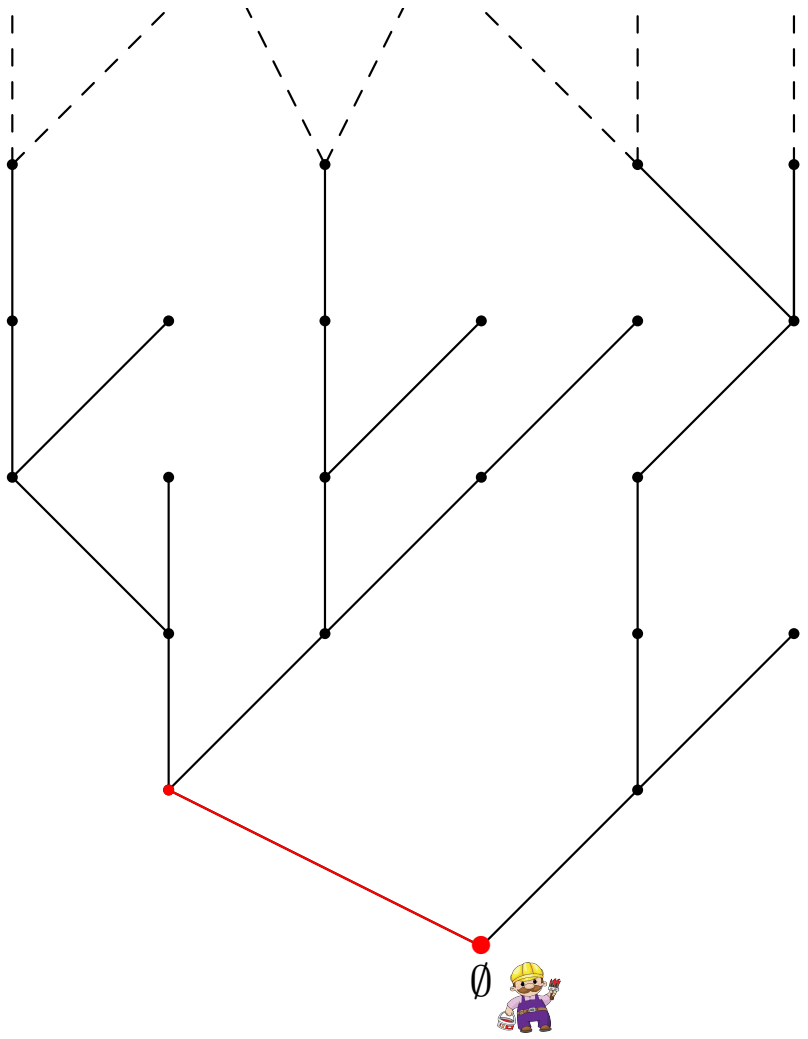
$\mathcal{T}^n$ (trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'au temps $n$) : arbre constitué des sommets de $\mathbb{T}$ visités par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avant le temps $n$.
$\mathcal{T}^n := \{x \in \mathbb{T} \mid \exists k \leq n, X_k = x\}$.



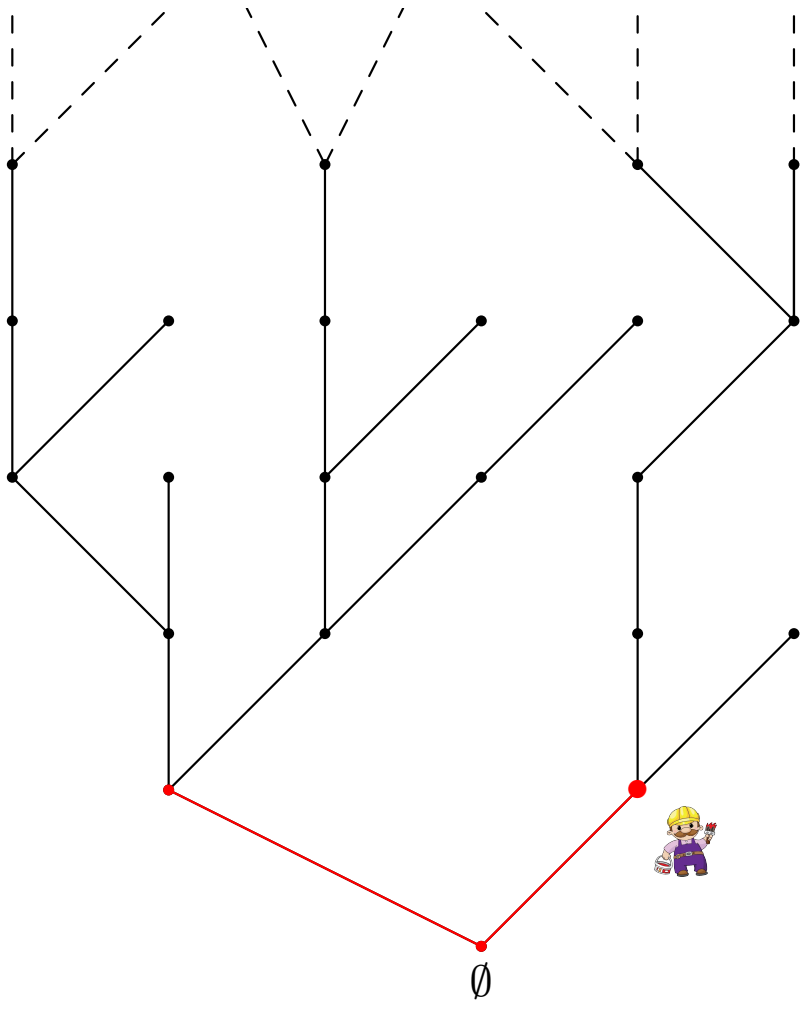
$\mathcal{T}^n$ (trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'au temps $n$) : arbre constitué des sommets de $\mathbb{T}$ visités par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avant le temps $n$.
$\mathcal{T}^n := \{x \in \mathbb{T} \mid \exists k \leq n, X_k = x\}$.



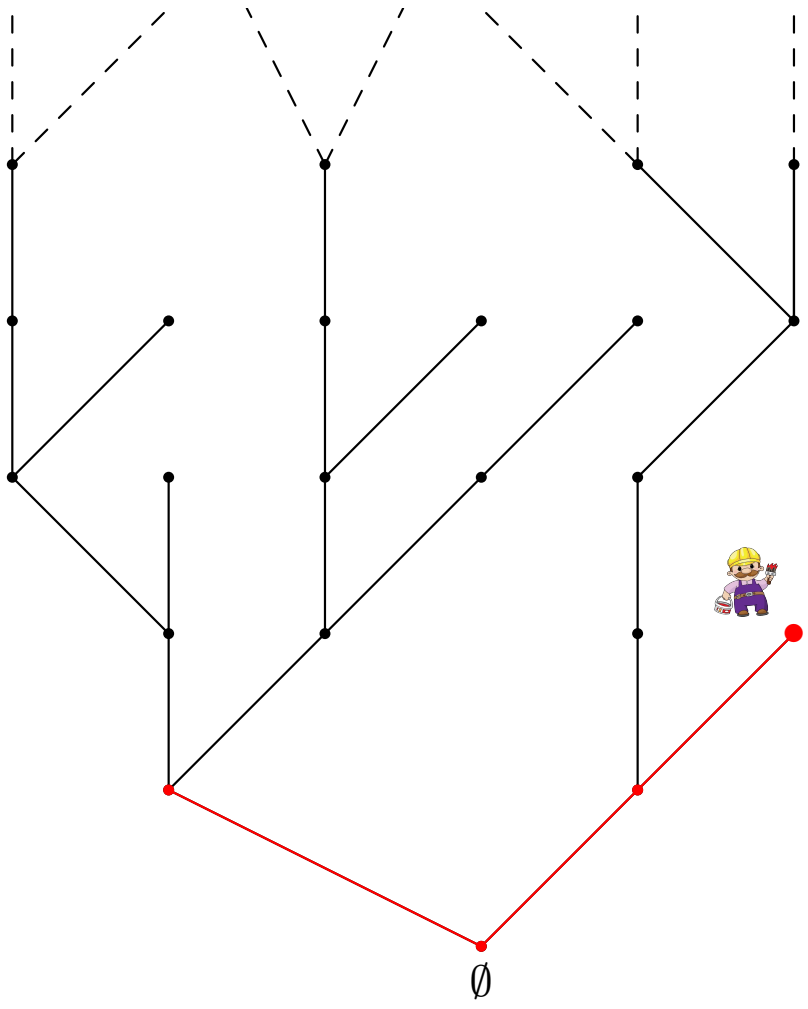
$\mathcal{T}^n$ (trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'au temps $n$) : arbre constitué des sommets de $\mathbb{T}$ visités par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avant le temps $n$.
$\mathcal{T}^n := \{x \in \mathbb{T} \mid \exists k \leq n, X_k = x\}$.



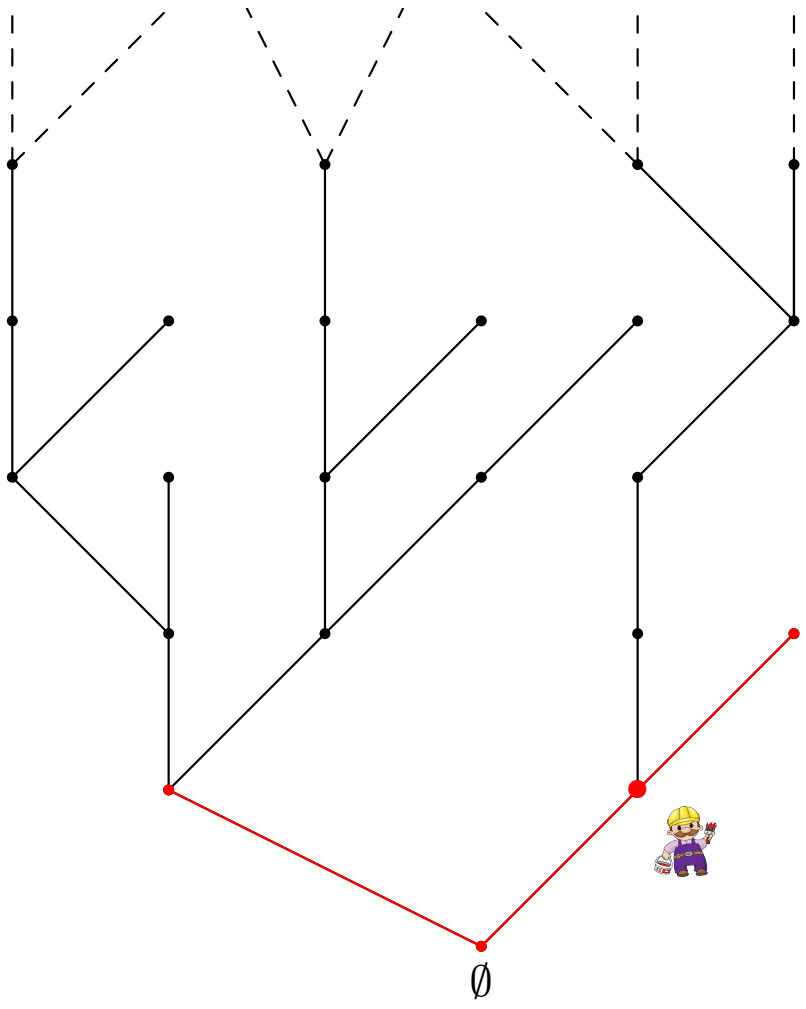
$\mathcal{T}^n$ (trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'au temps $n$) : arbre constitué des sommets de $\mathbb{T}$ visités par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avant le temps $n$.
$\mathcal{T}^n := \{x \in \mathbb{T} \mid \exists k \leq n, X_k = x\}$.



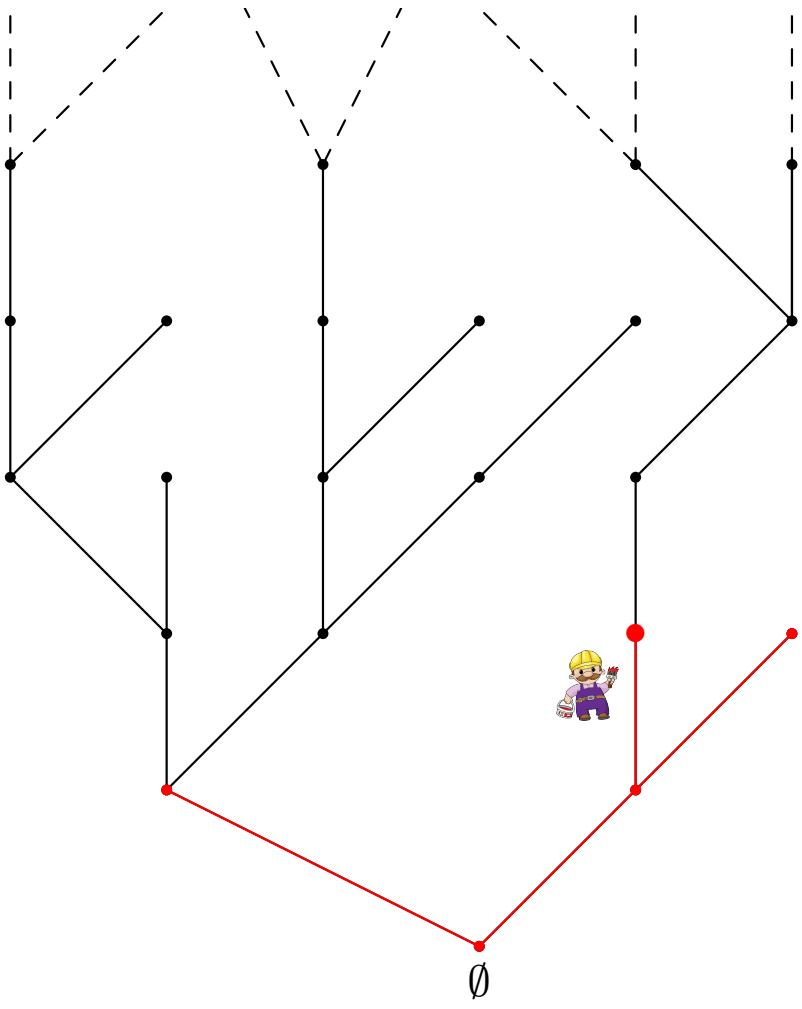
$\mathcal{T}^n$ (trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'au temps $n$) : arbre constitué des sommets de $\mathbb{T}$ visités par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avant le temps $n$.
$\mathcal{T}^n := \{x \in \mathbb{T} \mid \exists k \leq n, X_k = x\}$.



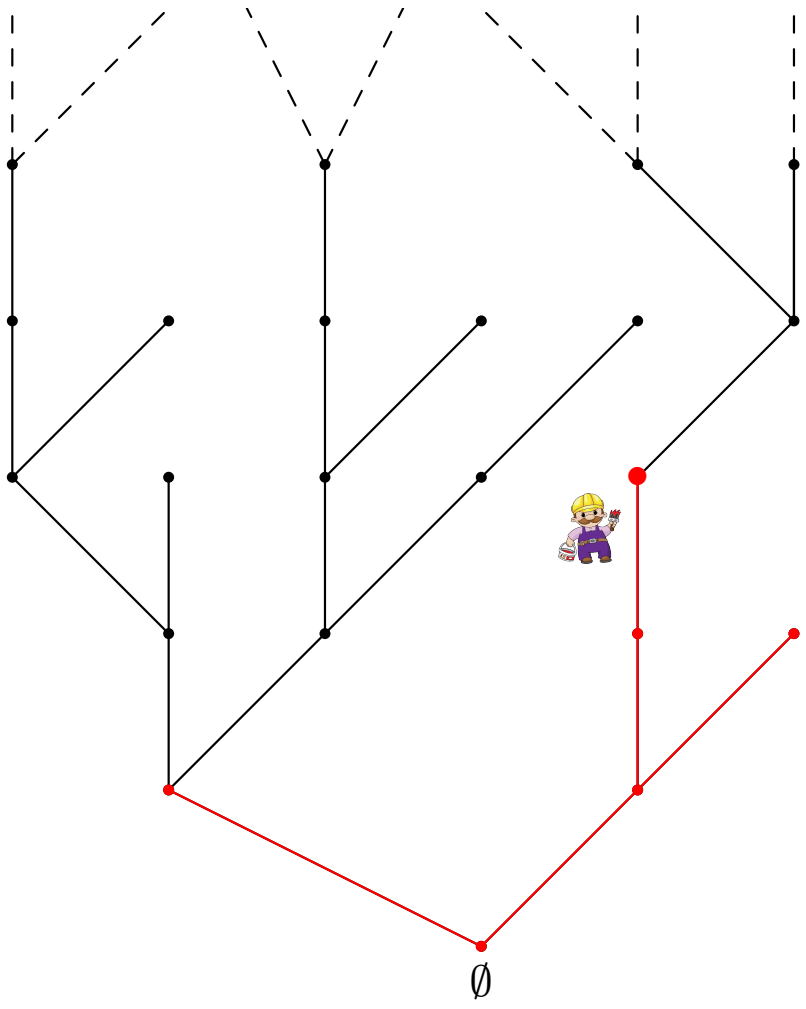
$\mathcal{T}^n$ (trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'au temps $n$) : arbre constitué des sommets de $\mathbb{T}$ visités par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avant le temps $n$.
$\mathcal{T}^n := \{x \in \mathbb{T} \mid \exists k \leq n, X_k = x\}$.



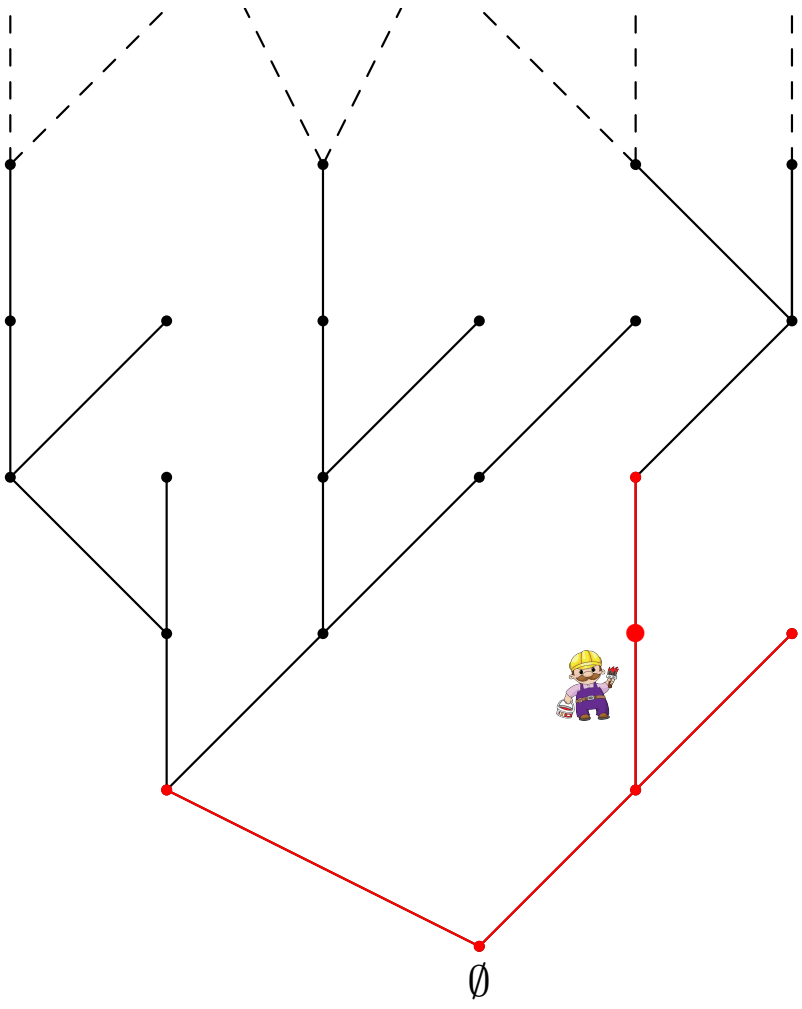
$\mathcal{T}^n$ (trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'au temps $n$) : arbre constitué des sommets de $\mathbb{T}$ visités par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avant le temps $n$.
$\mathcal{T}^n := \{x \in \mathbb{T} \mid \exists k \leq n, X_k = x\}$.



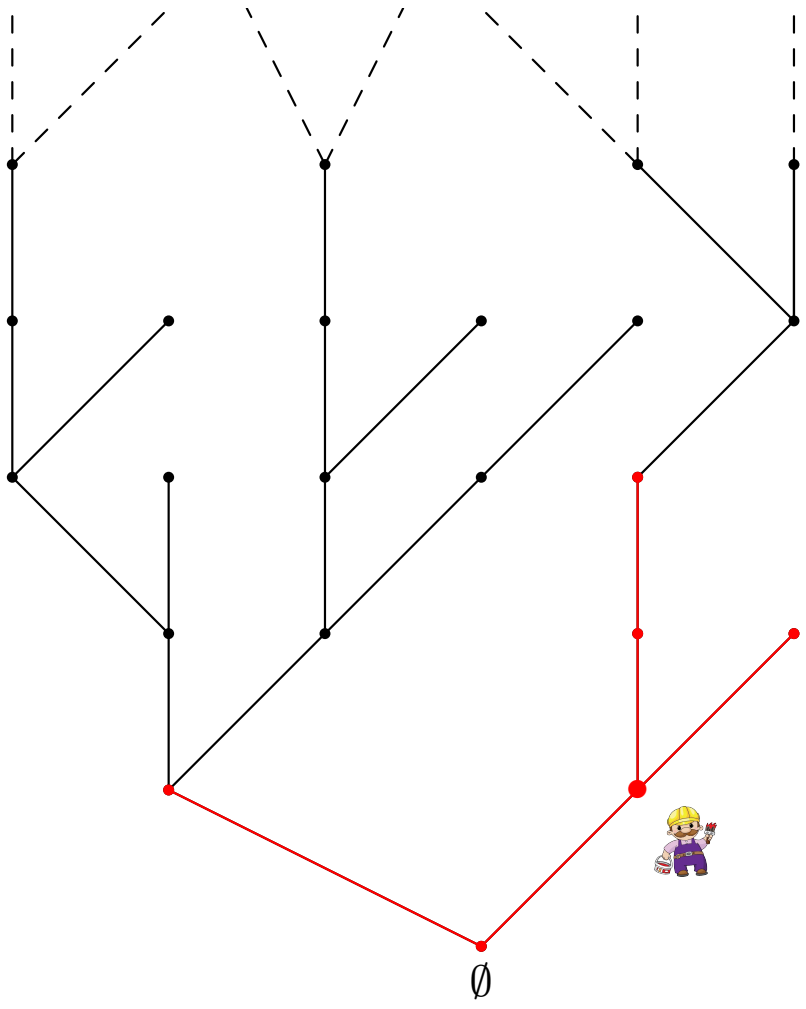
$\mathcal{T}^n$ (trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'au temps $n$) : arbre constitué des sommets de $\mathbb{T}$ visités par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avant le temps $n$.
$\mathcal{T}^n := \{x \in \mathbb{T} \mid \exists k \leq n, X_k = x\}$.



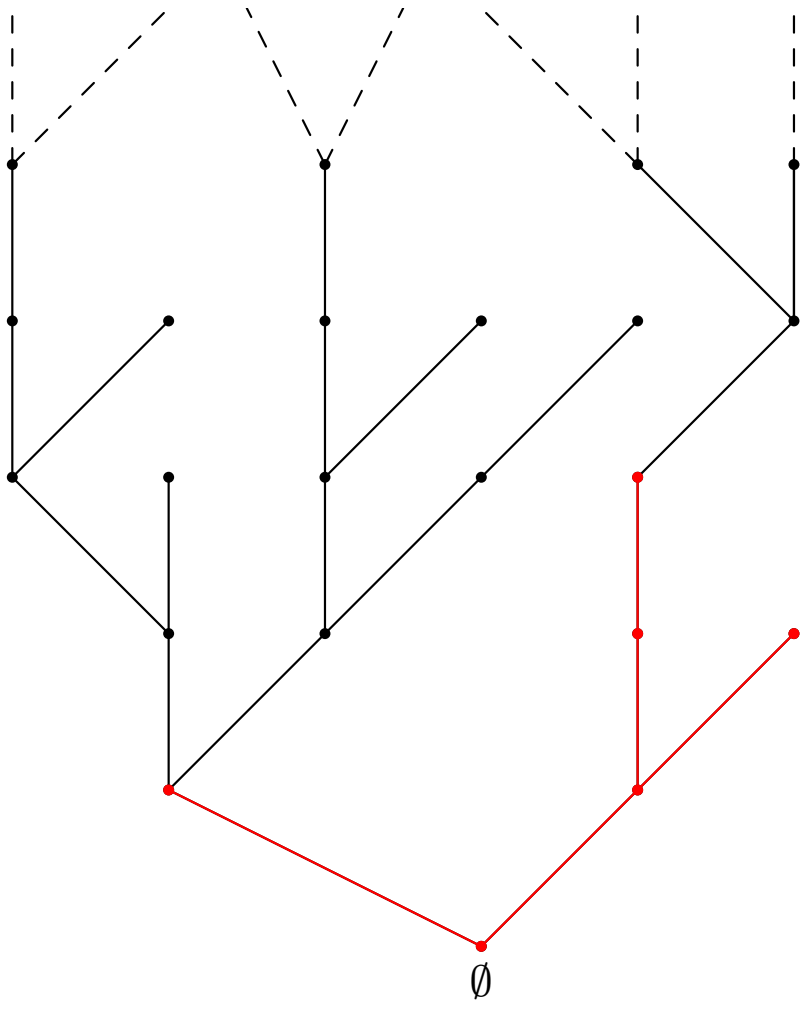
$\mathcal{T}^n$ (trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'au temps $n$) : arbre constitué des sommets de $\mathbb{T}$ visités par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avant le temps $n$.
$\mathcal{T}^n := \{x \in \mathbb{T} \mid \exists k \leq n, X_k = x\}$.



$\mathcal{T}^n$ (trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'au temps $n$) : arbre constitué des sommets de $\mathbb{T}$ visités par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avant le temps $n$.
$\mathcal{T}^n := \{x \in \mathbb{T} \mid \exists k \leq n, X_k = x\}$.



$\mathcal{T}^n$ (trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'au temps $n$) : arbre constitué des sommets de $\mathbb{T}$ visités par $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avant le temps $n$.
$\mathcal{T}^n := \{x \in \mathbb{T} \mid \exists k \leq n, X_k = x\}$.




Arbre rouge $= \mathcal{T}^9$

# Un TCL couplé

Soit $\mu$ une loi de reproduction sur-critique, et $(A_x)_x$ des variables aléatoires positives i.i.d. .

# Un TCL couplé

Soit $\mu$ une loi de reproduction sur-critique, et $(A_x)_x$ des variables aléatoires positives i.i.d. .

## E. Aidekon & R. '14

Supposons que $\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N(\emptyset)} A_i^2\right] < 1$.

# Un TCL couplé

Soit $\mu$ une loi de reproduction sur-critique, et $(A_x)_x$ des variables aléatoires positives i.i.d. .

## E. Aidekon & R. '14

Supposons que $\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N(\emptyset)} A_i^2\right] < 1$.
Alors il existe une constante explicite $\Sigma$ telle que, pour $\mu$-presque tout arbre de GW $\mathbb{T}$, sous $\mathbf{P}_\lambda$ (ou sous $\mathbf{P}_{\lambda, GW_\mu^*}$)

,

# Un TCL couplé

Soit $\mu$ une loi de reproduction sur-critique, et $(A_x)_x$ des variables aléatoires positives i.i.d. .

## E. Aidekon & R. '14

Supposons que $\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N(\emptyset)} A_i^2\right] < 1$.
Alors il existe une constante explicite $\Sigma$ telle que, pour $\mu$-presque tout arbre de GW $\mathbb{T}$, sous $\mathbf{P}_\lambda$ (ou sous $\mathbf{P}_{\lambda, GW_\mu^*}$)

$$\left(\left(\frac{|X^{\mathbb{T}}_{\lfloor nt \rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0\right), \mathcal{T}^n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(\left(\frac{2}{\Sigma}|B_t|, t \geq 0\right), \mathcal{T}((\frac{2}{\Sigma}|B_t|)_{0\leq t\leq 1})\right)$$

,

# Un TCL couplé

Soit $\mu$ une loi de reproduction sur-critique, et $(A_x)_x$ des variables aléatoires positives i.i.d. .

## E. Aidekon & R. '14

Supposons que $\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N(\emptyset)} A_i^2\right] < 1$.
Alors il existe une constante explicite $\Sigma$ telle que, pour $\mu$-presque tout arbre de GW $\mathbb{T}$, sous $\mathbf{P}_\lambda$ (ou sous $\mathbf{P}_{\lambda, GW_\mu^*}$)

$$\left(\left(\frac{|X^{\mathbb{T}}_{\lfloor nt \rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0\right), \mathcal{T}^n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(\left(\frac{2}{\Sigma}|B_t|, t \geq 0\right), \mathcal{T}((\frac{2}{\Sigma}|B_t|)_{0\leq t\leq 1})\right)$$

où $\mathcal{T}(\frac{2}{\Sigma}|B|)$ est l'arbre réel codé par $\frac{2}{\Sigma}|B|$,

# Un TCL couplé

Soit $\mu$ une loi de reproduction sur-critique, et $(A_x)_x$ des variables aléatoires positives i.i.d. .

## E. Aidekon & R. '14

Supposons que $\mathbf{E}\left[\sum_{i=1}^{N(\emptyset)} A_i^2\right] < 1$.
Alors il existe une constante explicite $\Sigma$ telle que, pour $\mu$-presque tout arbre de GW $\mathbb{T}$, sous $\mathbf{P}_\lambda$ (ou sous $\mathbf{P}_{\lambda, GW_\mu^*}$)

$$\left(\left(\frac{|X^{\mathbb{T}}_{\lfloor nt \rfloor}|}{\sqrt{n}}, t \geq 0\right), \mathcal{T}^n\right) \xrightarrow[n\to\infty]{d} \left(\left(\frac{2}{\Sigma}|B_t|, t \geq 0\right), \mathcal{T}((\frac{2}{\Sigma}|B_t|)_{0\leq t\leq 1})\right)$$

où $\mathcal{T}(\frac{2}{\Sigma}|B|)$ est l'arbre réel codé par $\frac{2}{\Sigma}|B|$, et où la convergence a lieu pour la topologie de Skorokhod sur $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ et la topologie de Gromov-Haussdorff sur les arbres réels.

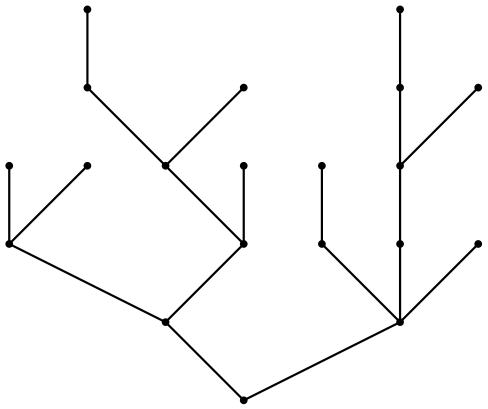
# Éléments de la preuve

# Éléments de la preuve

Soit $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$, ..., $\mathbb{T}_n$, ... une suite d'arbres de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ sur-critique ($m = \mathbf{E}[\mu] > 1$) à variance finie.

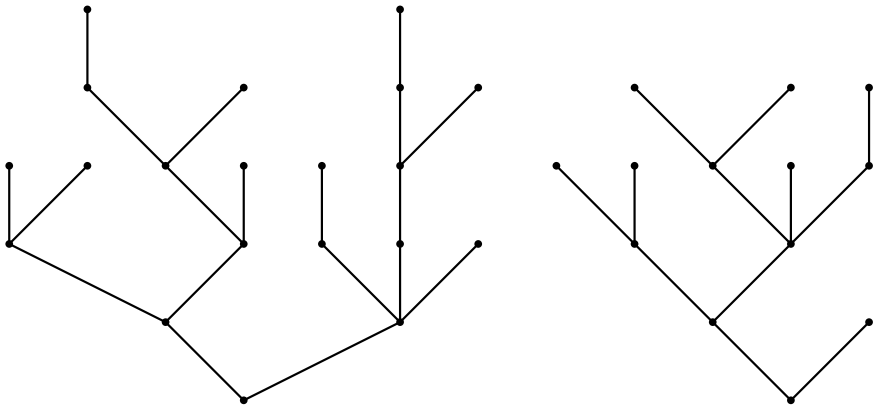
# Éléments de la preuve

Soit $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$, ..., $\mathbb{T}_n$, ... une suite d'arbres de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ sur-critique ($m = \mathbf{E}[\mu] > 1$) à variance finie.



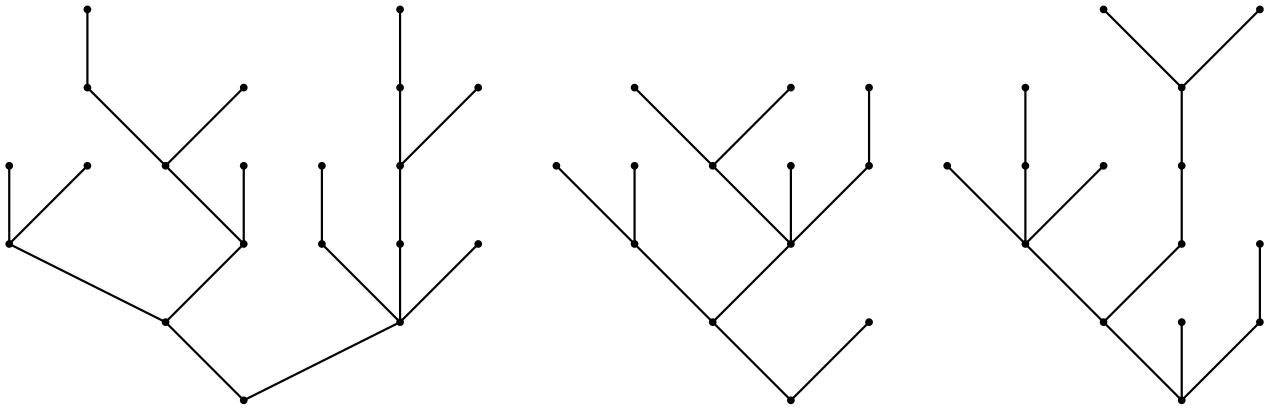
# Éléments de la preuve

Soit $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$, ..., $\mathbb{T}_n$, ... une suite d'arbres de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ sur-critique ($m = \mathbf{E}[\mu] > 1$) à variance finie.



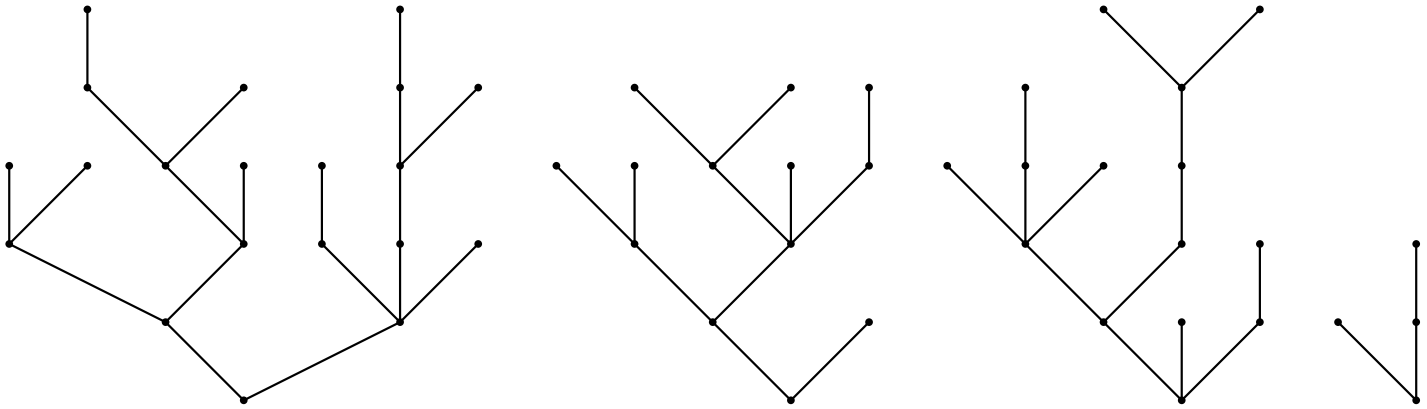
# Éléments de la preuve

Soit $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$, ..., $\mathbb{T}_n$, ... une suite d'arbres de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ sur-critique ($m = \mathbf{E}[\mu] > 1$) à variance finie.



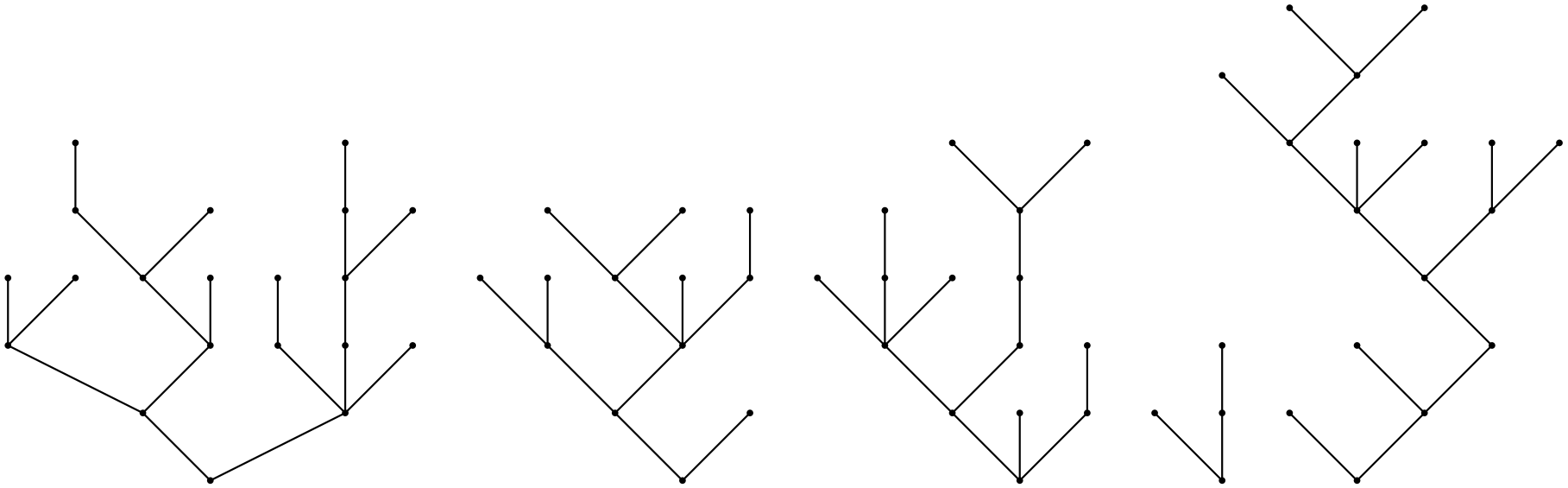
# Éléments de la preuve

Soit $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$, ..., $\mathbb{T}_n$, ... une suite d'arbres de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ sur-critique ($m = \mathbf{E}[\mu] > 1$) à variance finie.



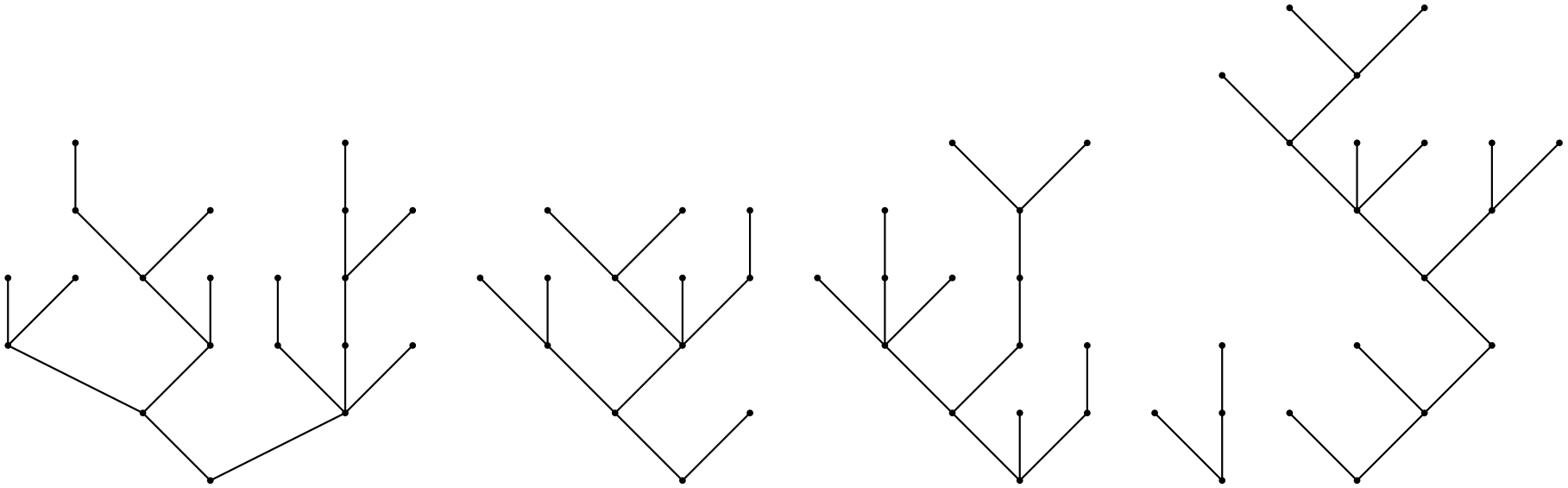
# Éléments de la preuve

Soit $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$, ..., $\mathbb{T}_n$, ... une suite d'arbres de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ sur-critique ($m = \mathbf{E}[\mu] > 1$) à variance finie.



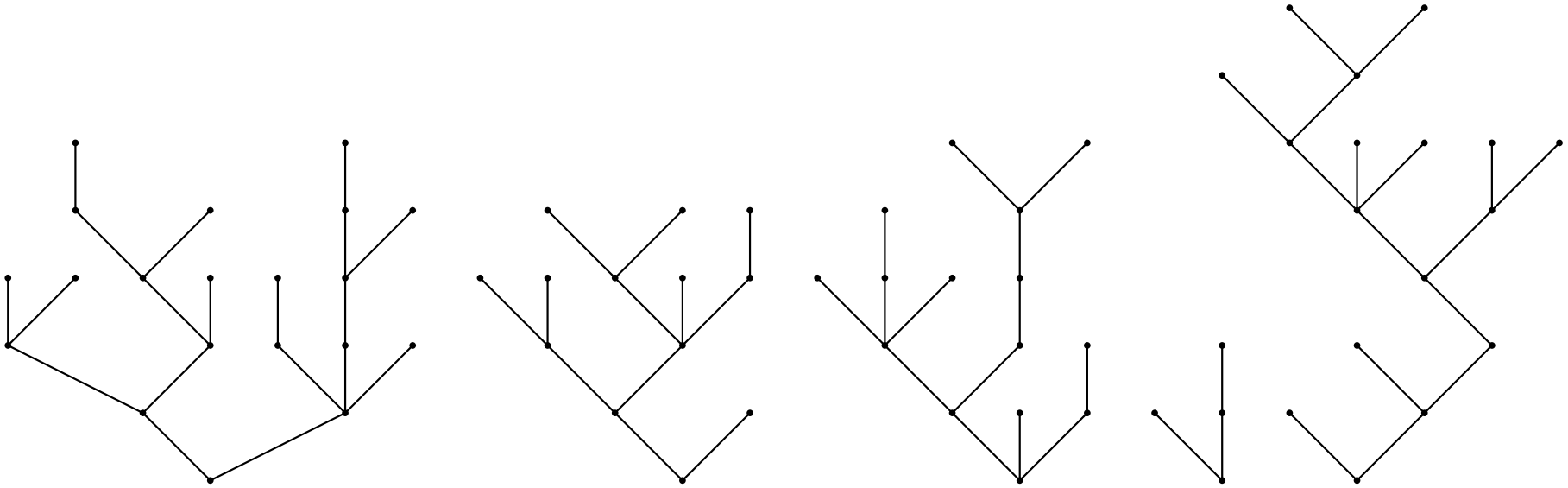
# Éléments de la preuve

Soit $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$, ..., $\mathbb{T}_n$, ... une suite d'arbres de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ sur-critique ($m = \mathbf{E}[\mu] > 1$) à variance finie.
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{T}_n$ forme une forêt notée $\mathbb{F}$.



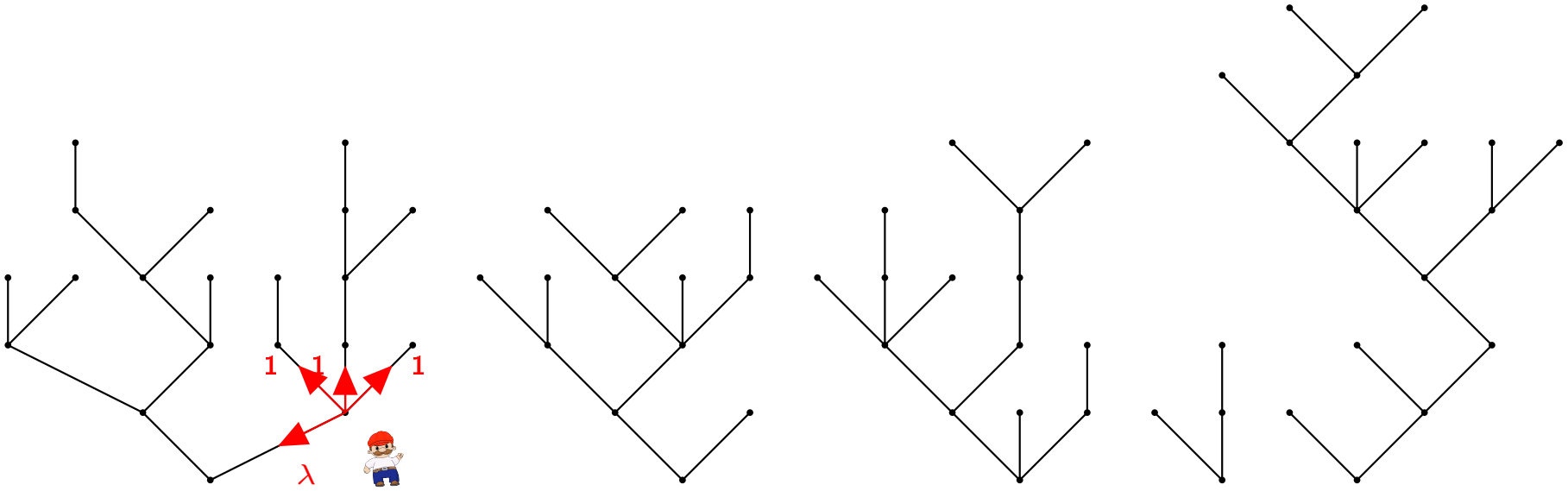
# Éléments de la preuve

Soit $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$, ..., $\mathbb{T}_n$, ... une suite d'arbres de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ sur-critique ($m = \mathbf{E}[\mu] > 1$) à variance finie.
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{T}_n$ forme une forêt notée $\mathbb{F}$.
Soit $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire $\lambda$-biaisée sur $\mathbb{F}$.



# Éléments de la preuve

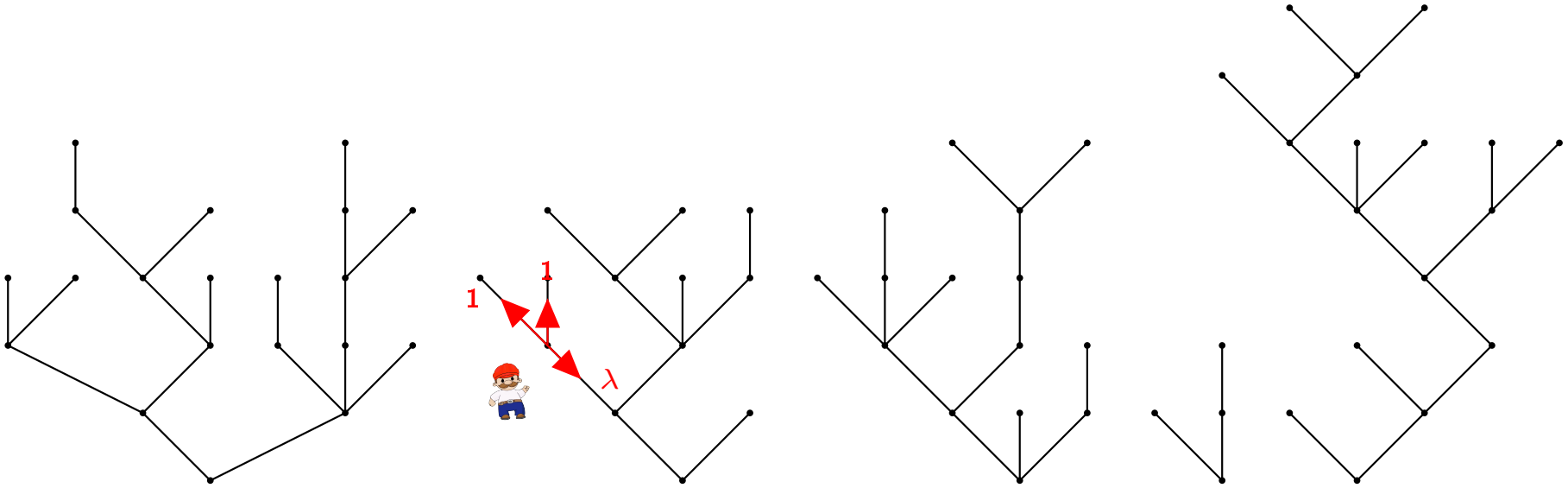
Soit $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$, ..., $\mathbb{T}_n$, ... une suite d'arbres de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ sur-critique ($m = \mathbf{E}[\mu] > 1$) à variance finie.
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{T}_n$ forme une forêt notée $\mathbb{F}$.
Soit $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire $\lambda$-biaisée sur $\mathbb{F}$.




Les probabilités de transition sont les mêmes que sur un arbre.

# Éléments de la preuve

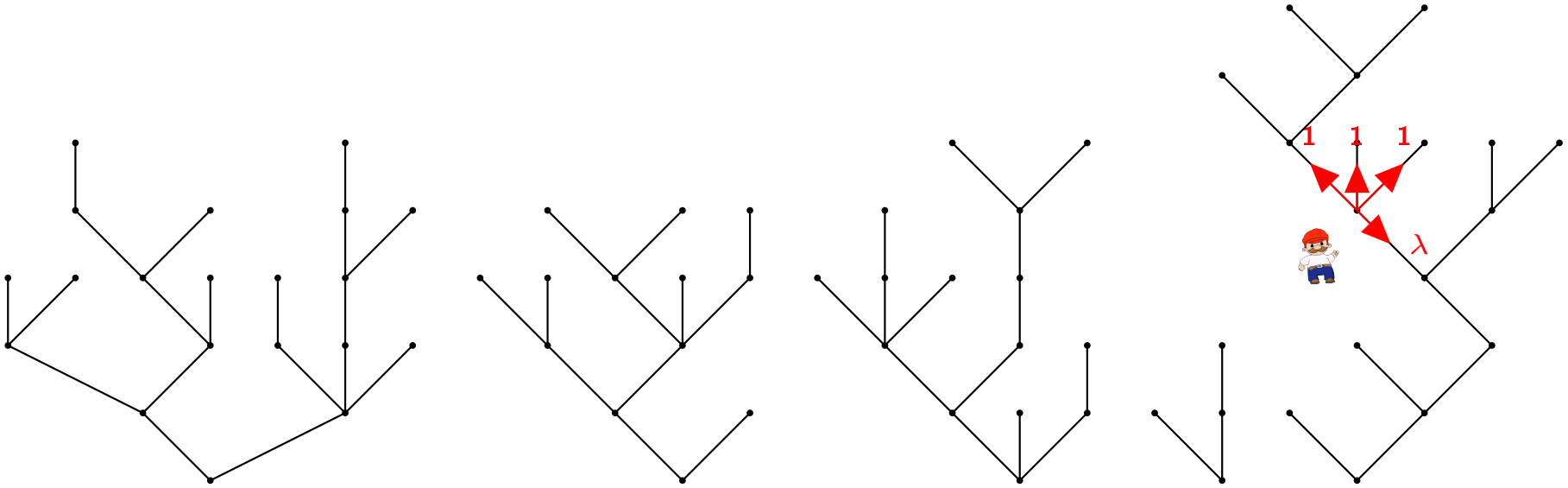
Soit $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$, ..., $\mathbb{T}_n$, ... une suite d'arbres de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ sur-critique ($m = \mathbf{E}[\mu] > 1$) à variance finie.
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{T}_n$ forme une forêt notée $\mathbb{F}$.
Soit $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire $\lambda$-biaisée sur $\mathbb{F}$.




Les probabilités de transition sont les mêmes que sur un arbre.

# Éléments de la preuve

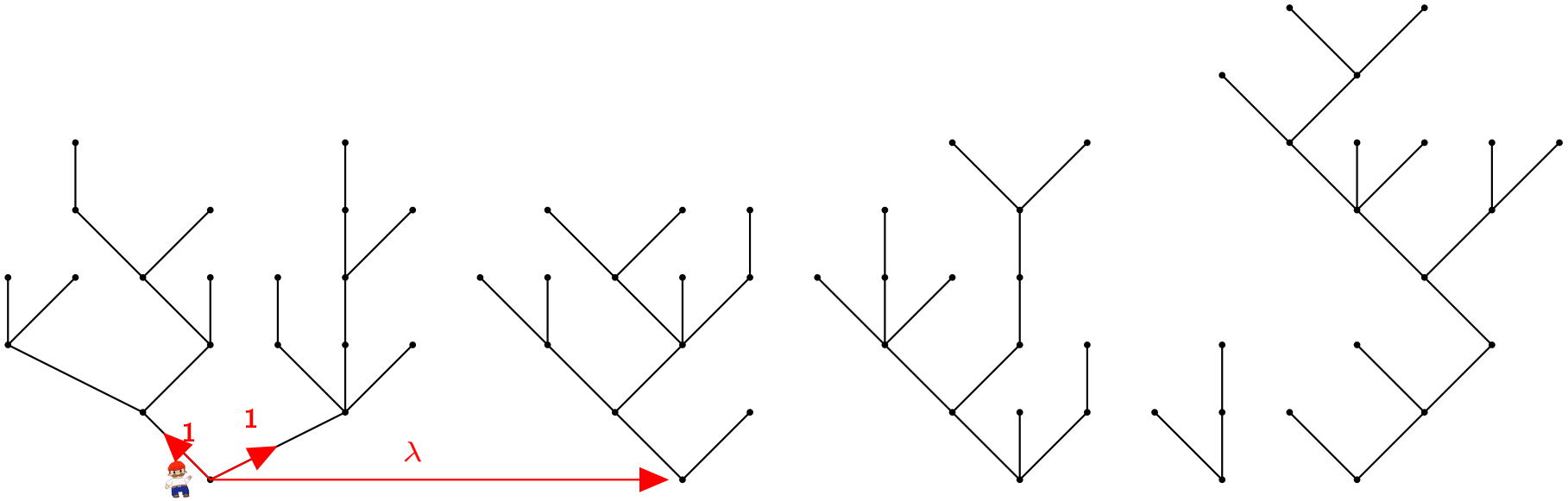
Soit $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$, ..., $\mathbb{T}_n$, ... une suite d'arbres de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ sur-critique ($m = \mathbf{E}[\mu] > 1$) à variance finie.
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{T}_n$ forme une forêt notée $\mathbb{F}$.
Soit $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire $\lambda$-biaisée sur $\mathbb{F}$.




Les probabilités de transition sont les mêmes que sur un arbre.

# Éléments de la preuve

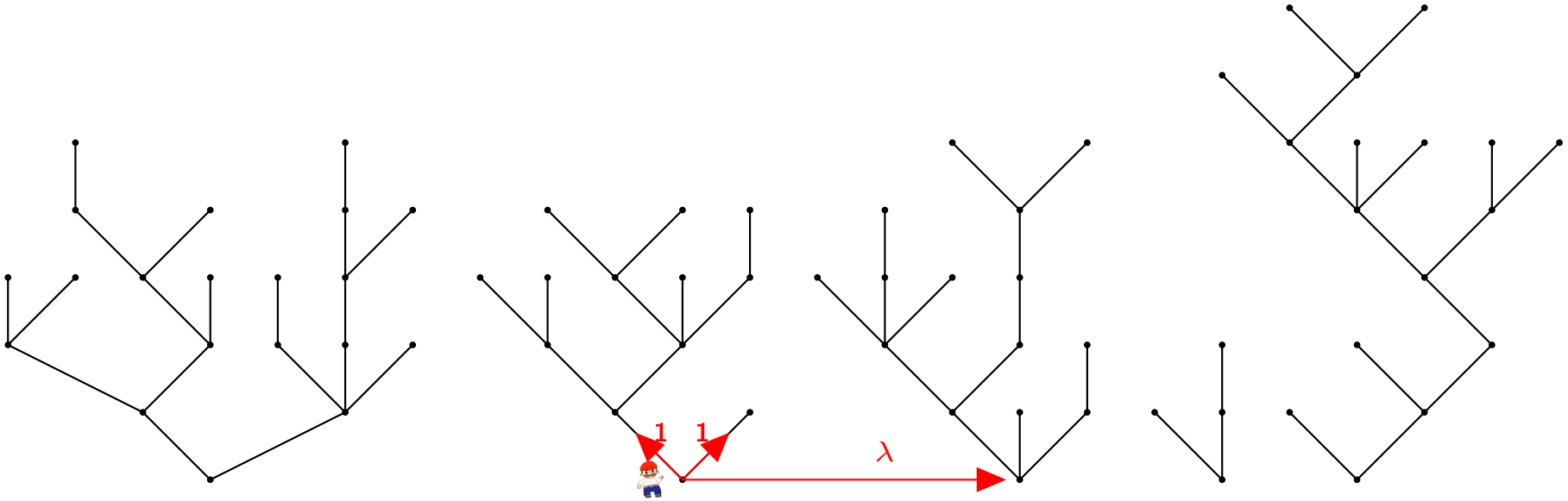
Soit $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$, ..., $\mathbb{T}_n$, ... une suite d'arbres de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ sur-critique ($m = \mathbf{E}[\mu] > 1$) à variance finie.
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{T}_n$ forme une forêt notée $\mathbb{F}$.
Soit $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire $\lambda$-biaisée sur $\mathbb{F}$.




Les probabilités de transition sont les mêmes que sur un arbre.
Sauf en les racines.

# Éléments de la preuve

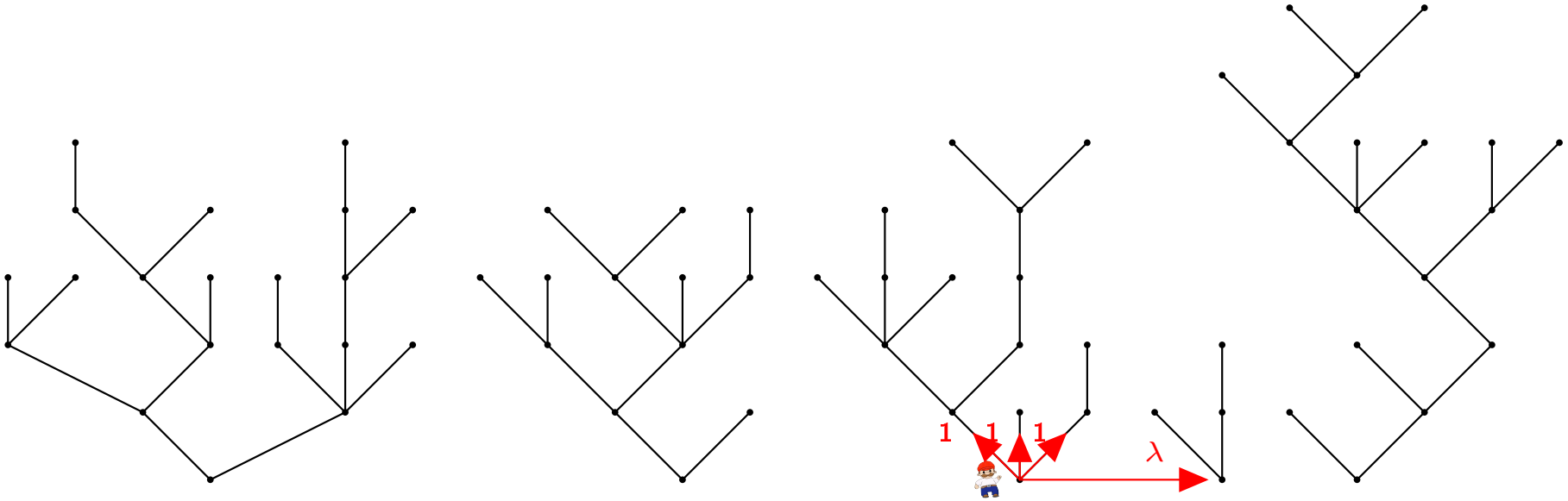
Soit $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$, ..., $\mathbb{T}_n$, ... une suite d'arbres de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ sur-critique ($m = \mathbf{E}[\mu] > 1$) à variance finie.
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{T}_n$ forme une forêt notée $\mathbb{F}$.
Soit $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire $\lambda$-biaisée sur $\mathbb{F}$.




Les probabilités de transition sont les mêmes que sur un arbre.
Sauf en les racines.

# Éléments de la preuve

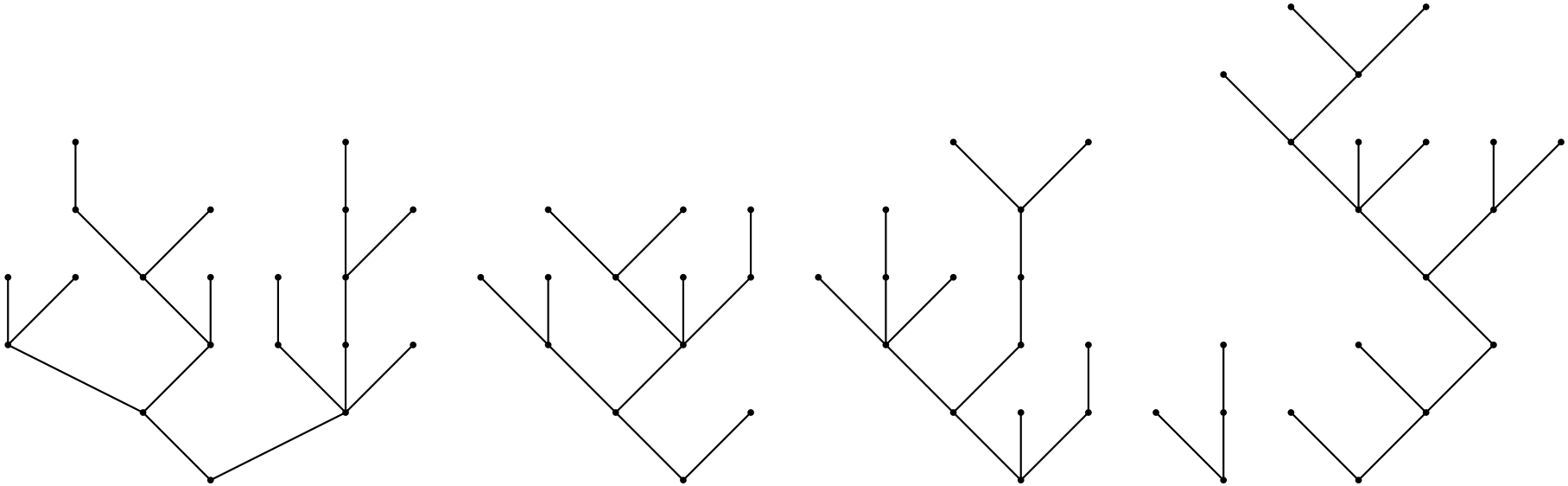
Soit $\mathbb{T}_1$, $\mathbb{T}_2$, ..., $\mathbb{T}_n$, ... une suite d'arbres de Galton-Watson de loi de reproduction $\mu$ sur-critique ($m = \mathbf{E}[\mu] > 1$) à variance finie.
$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{T}_n$ forme une forêt notée $\mathbb{F}$.
Soit $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ la marche aléatoire $\lambda$-biaisée sur $\mathbb{F}$.



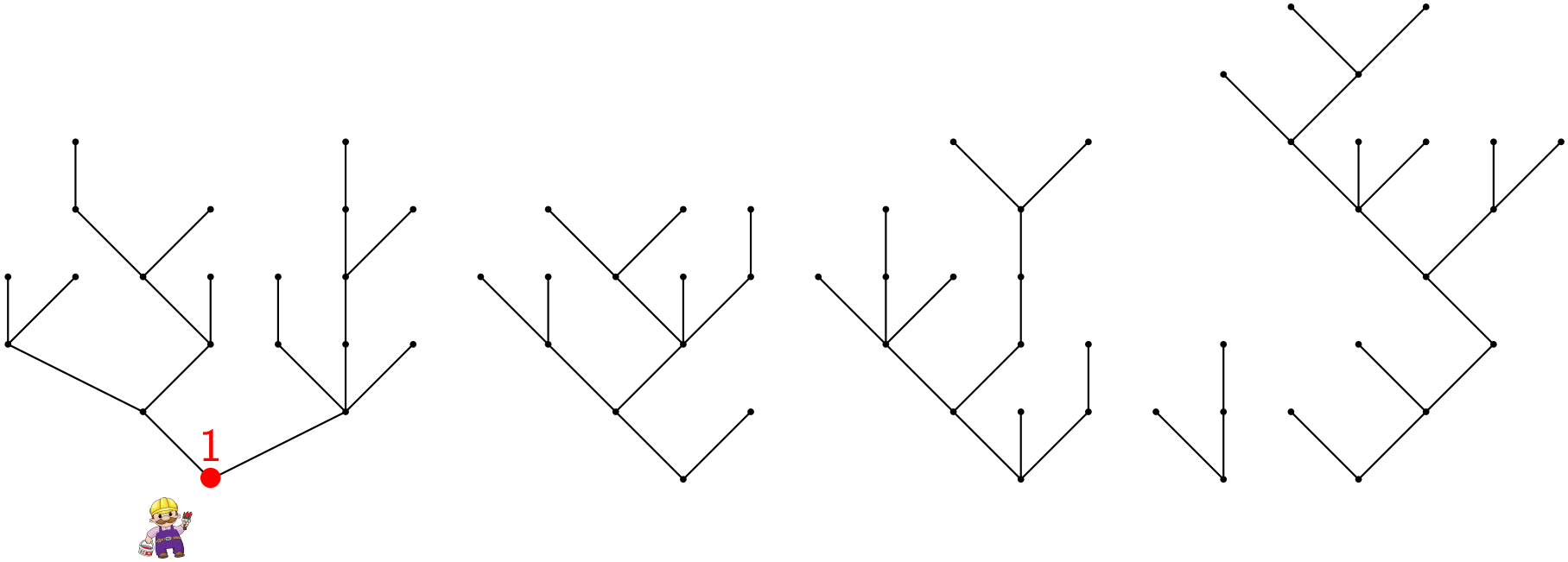

Les probabilités de transition sont les mêmes que sur un arbre.
Sauf en les racines.

On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.

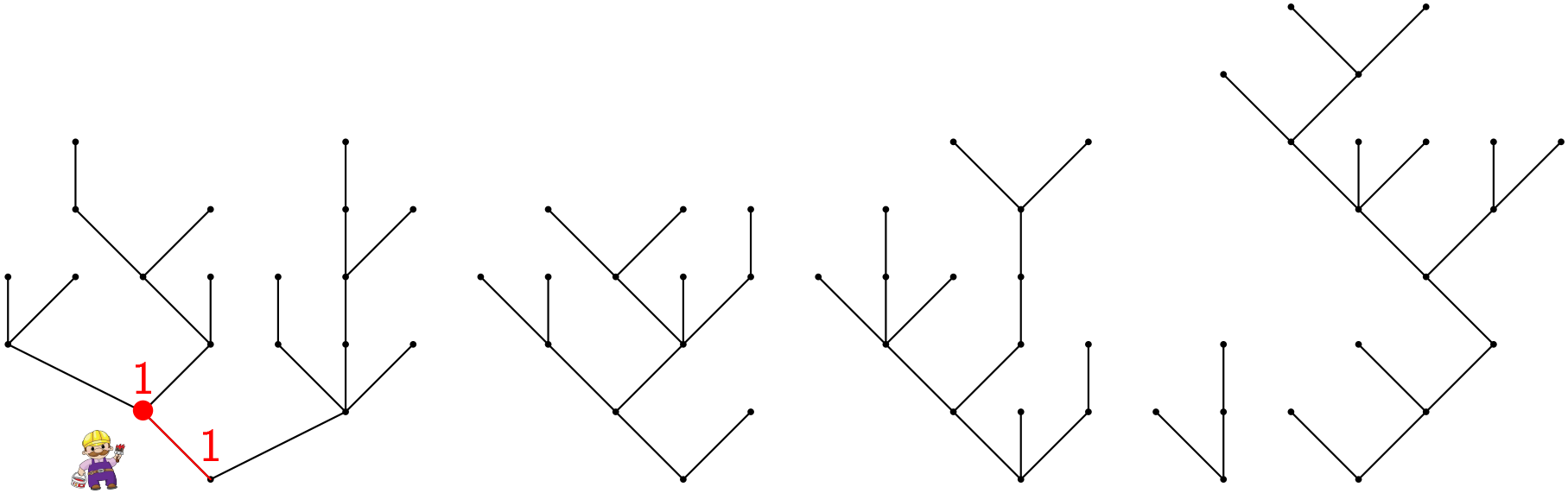
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



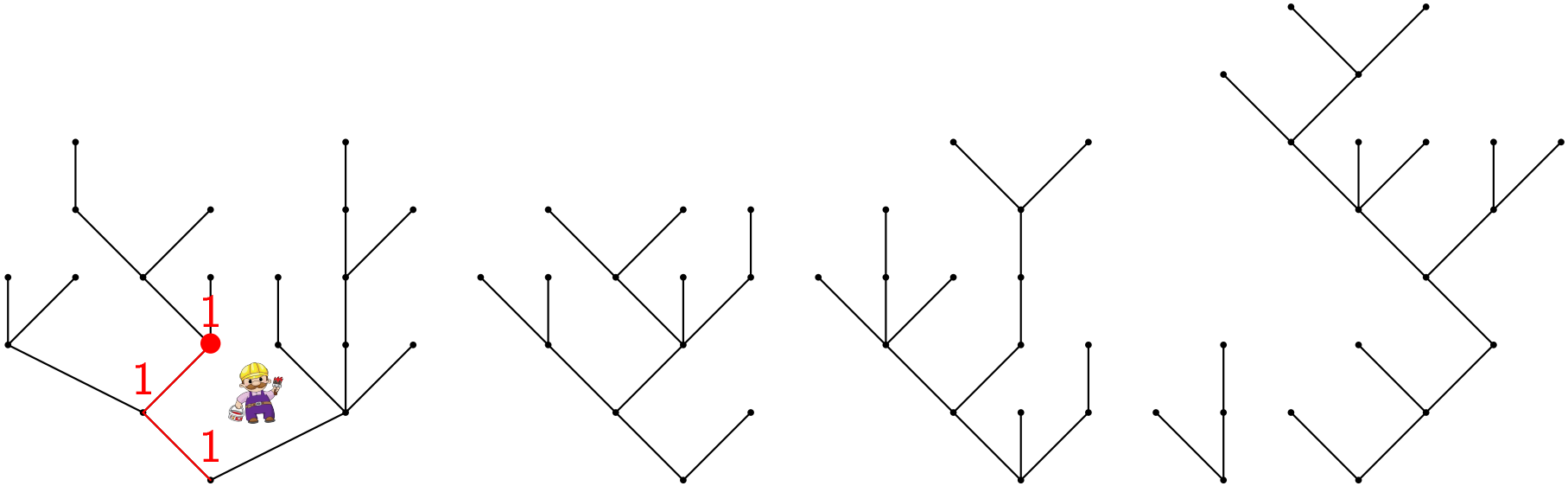
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



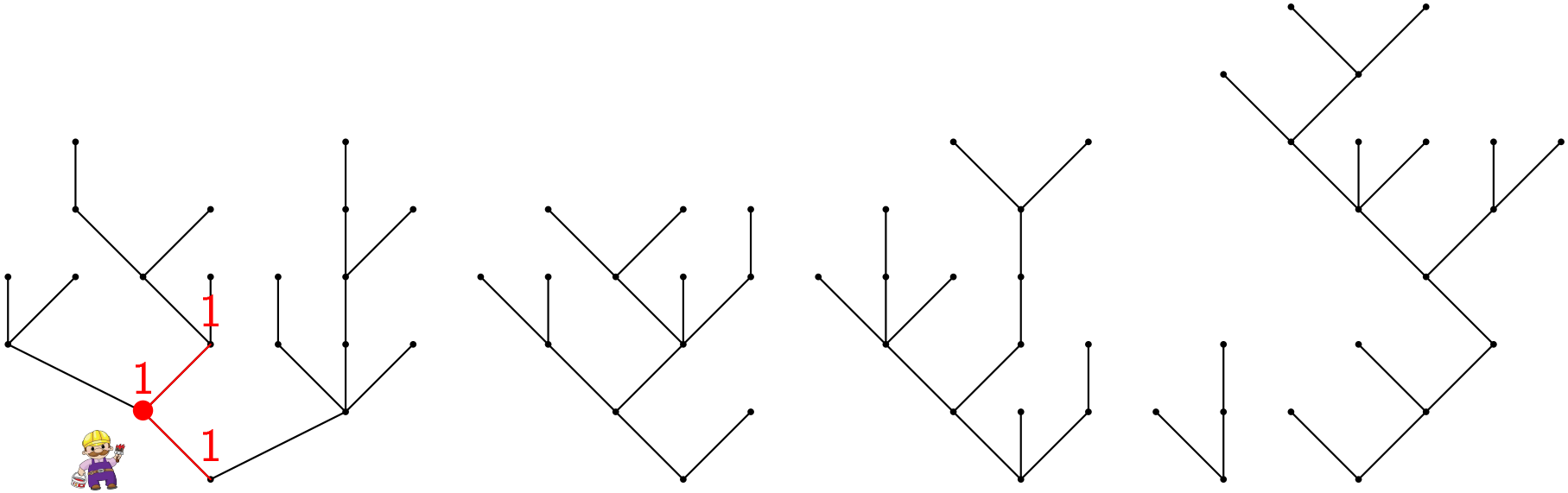
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



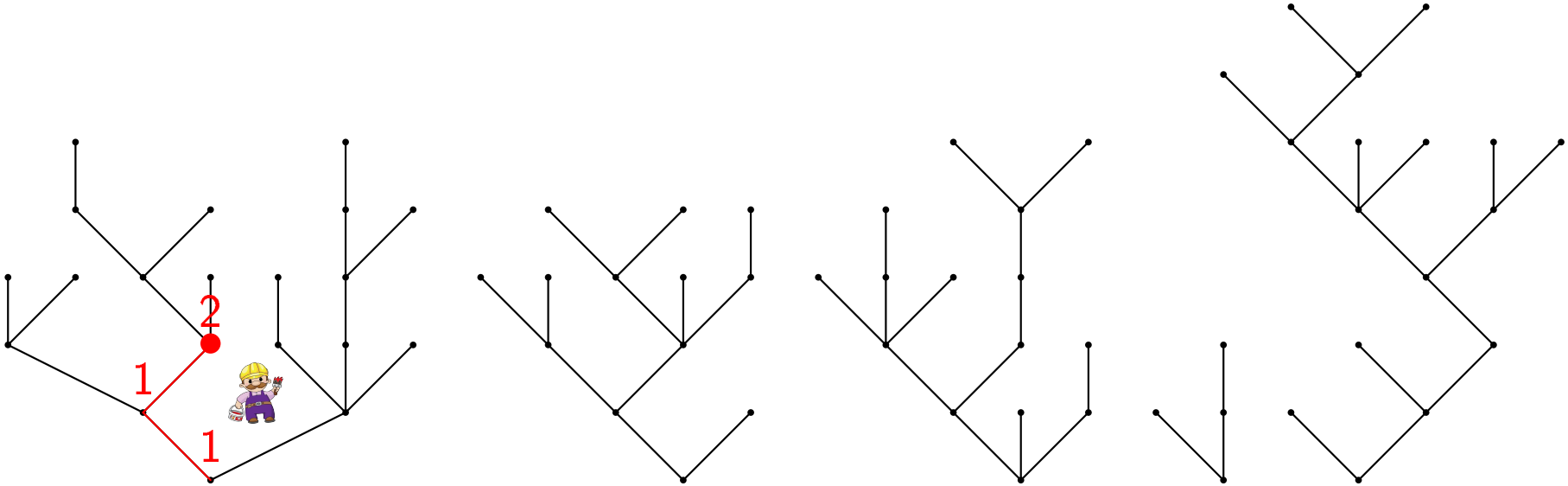
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



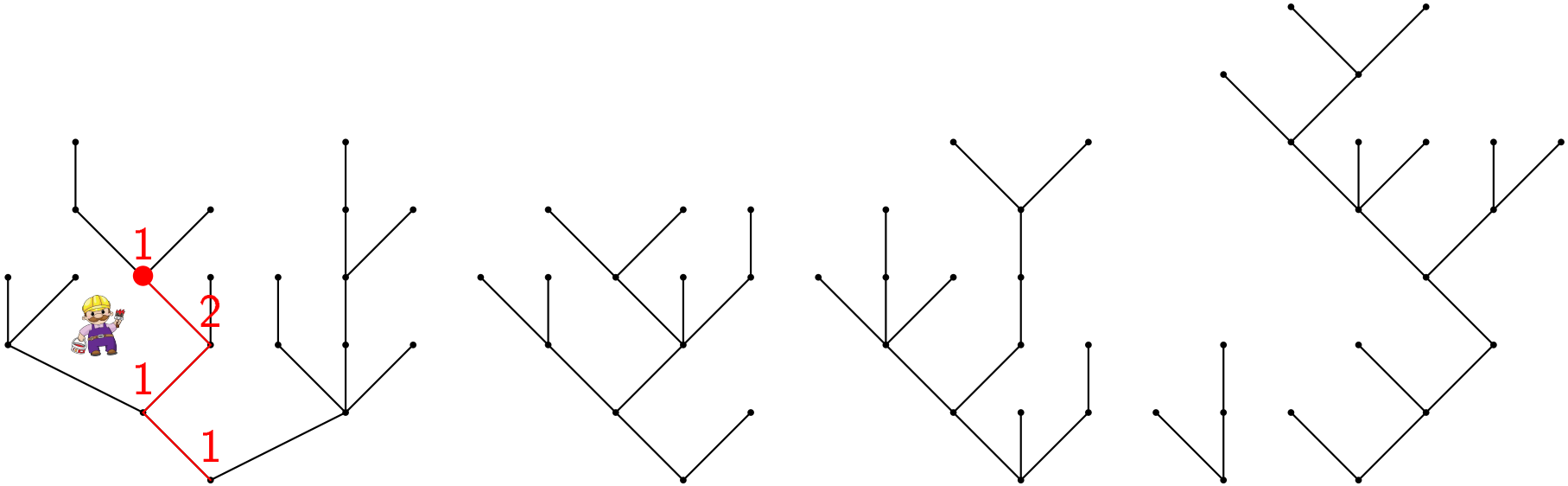
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



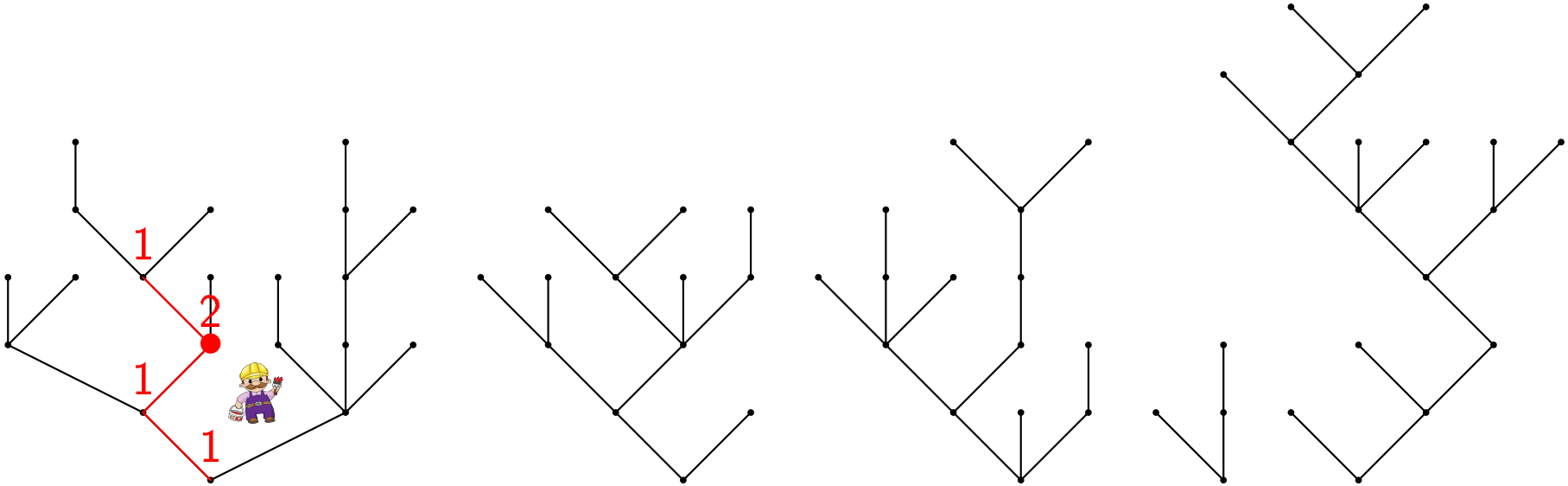
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



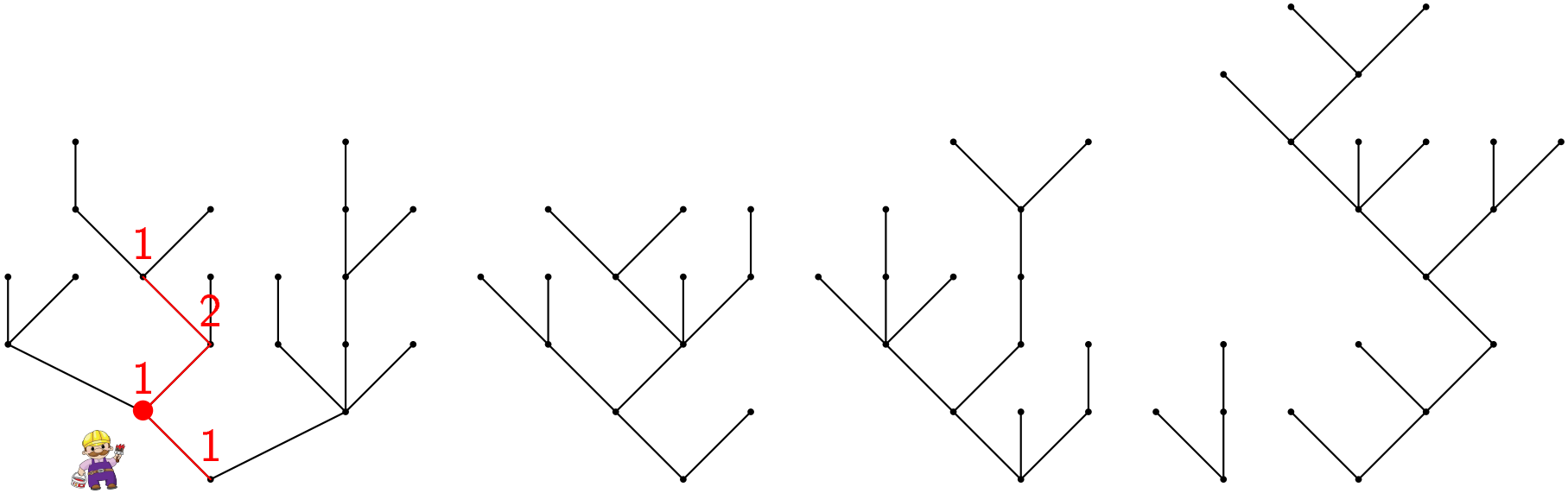
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



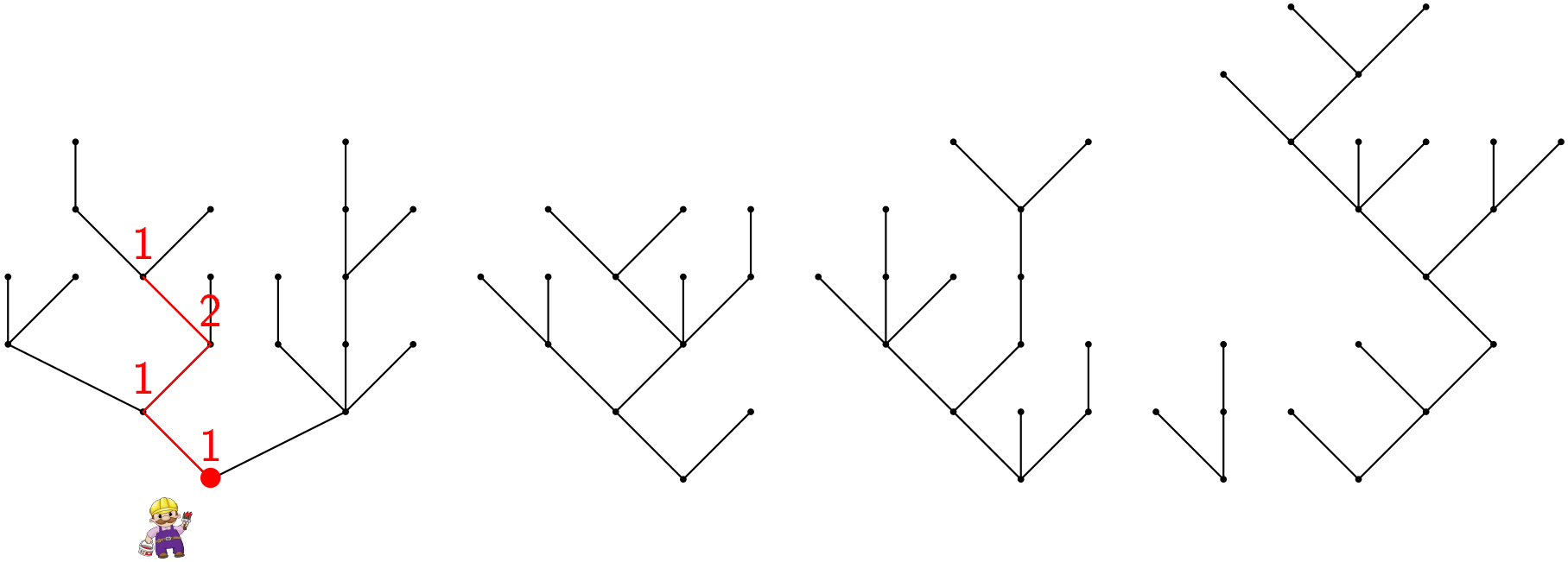
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



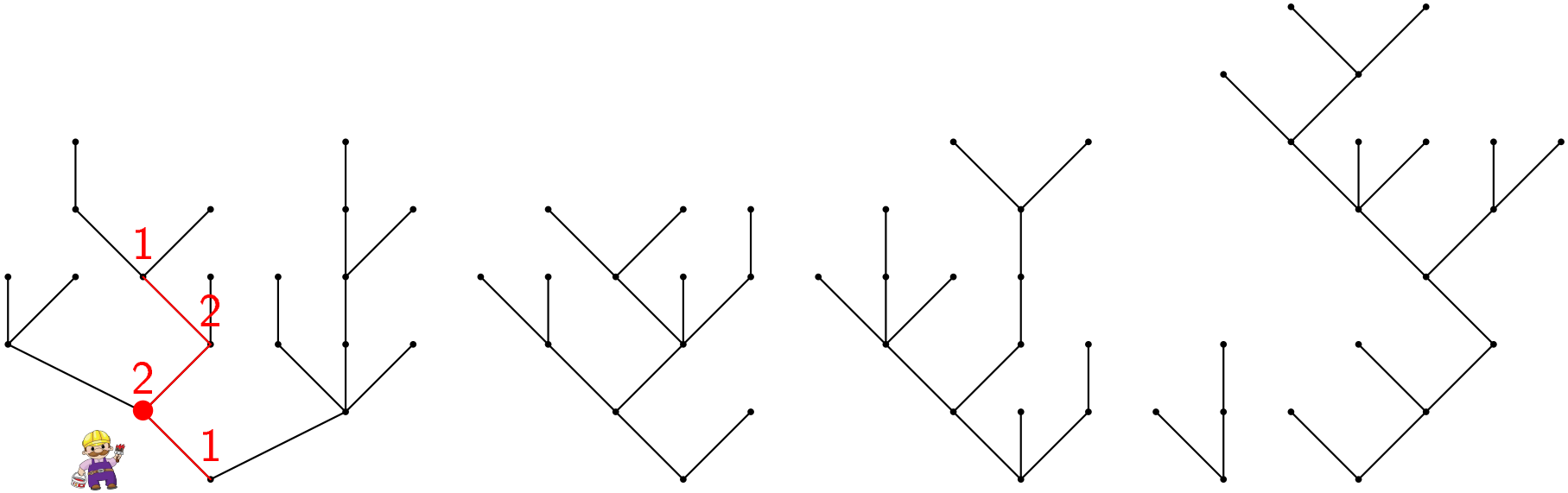
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



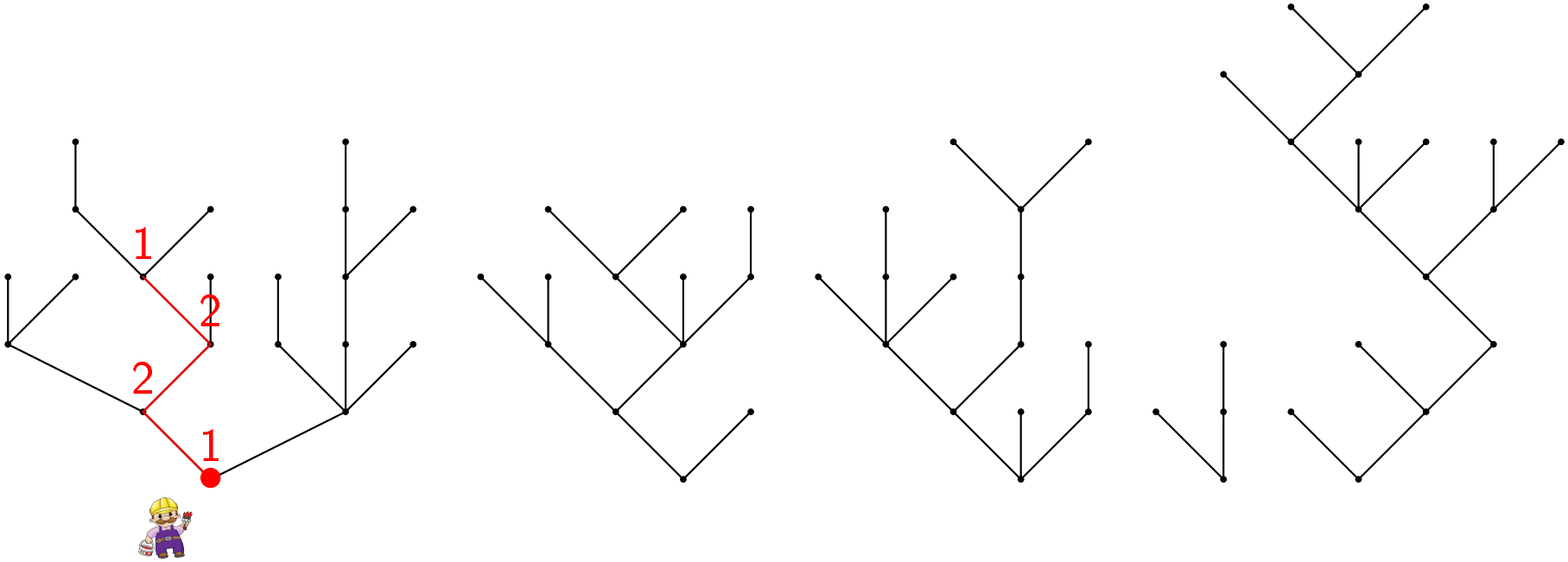
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



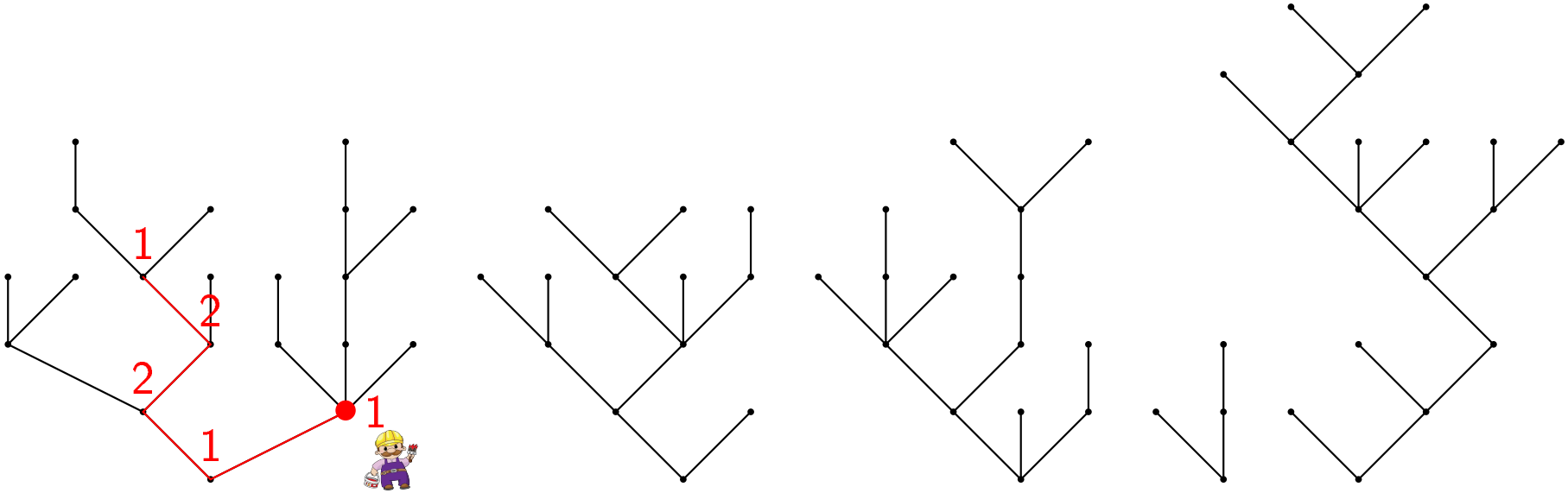
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



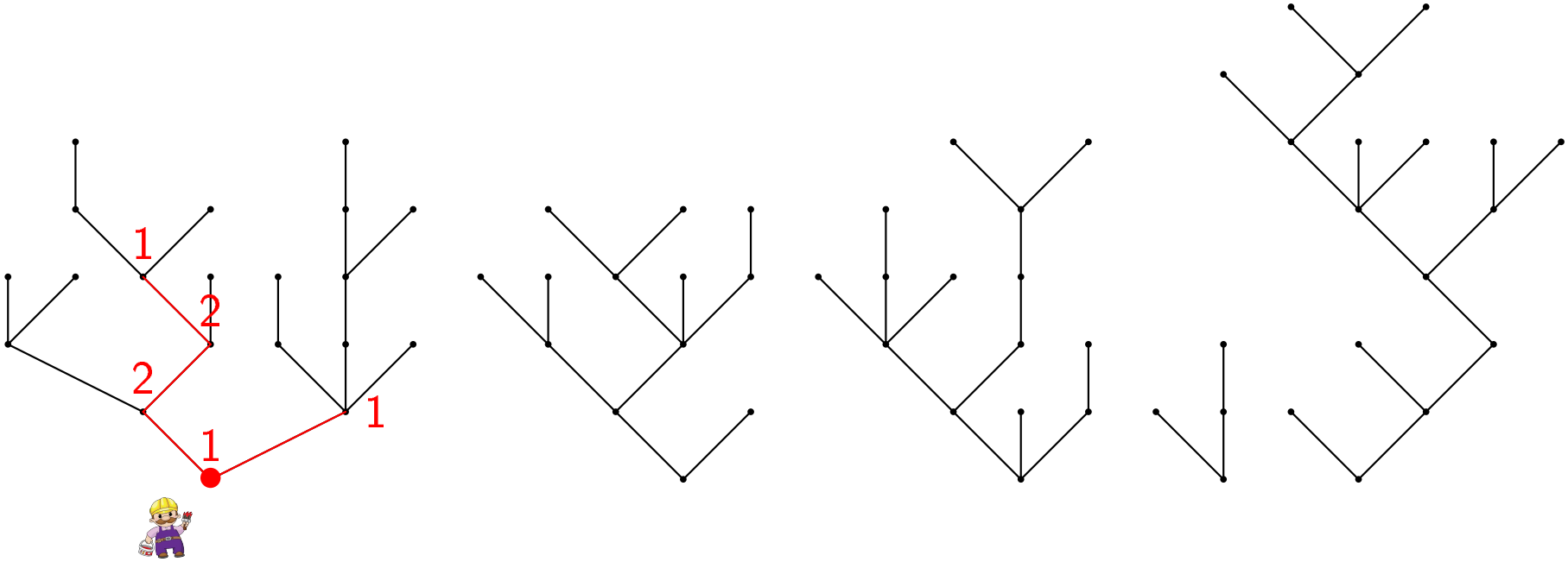
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



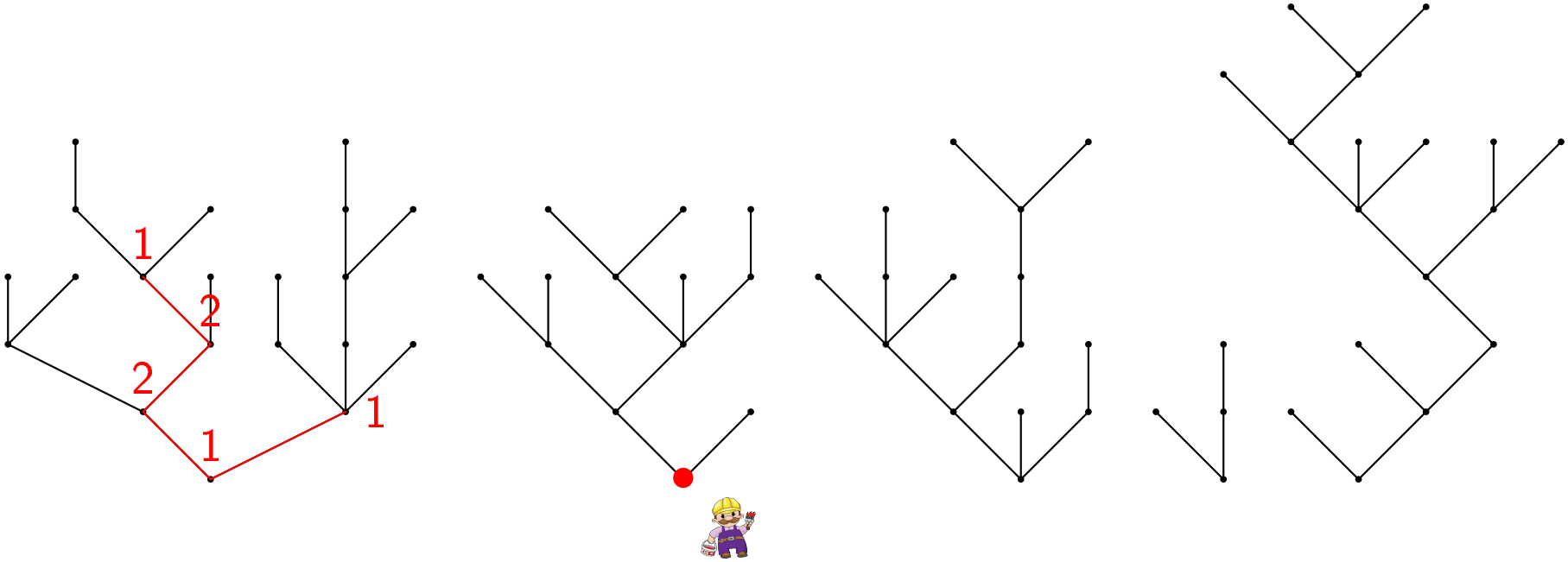
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



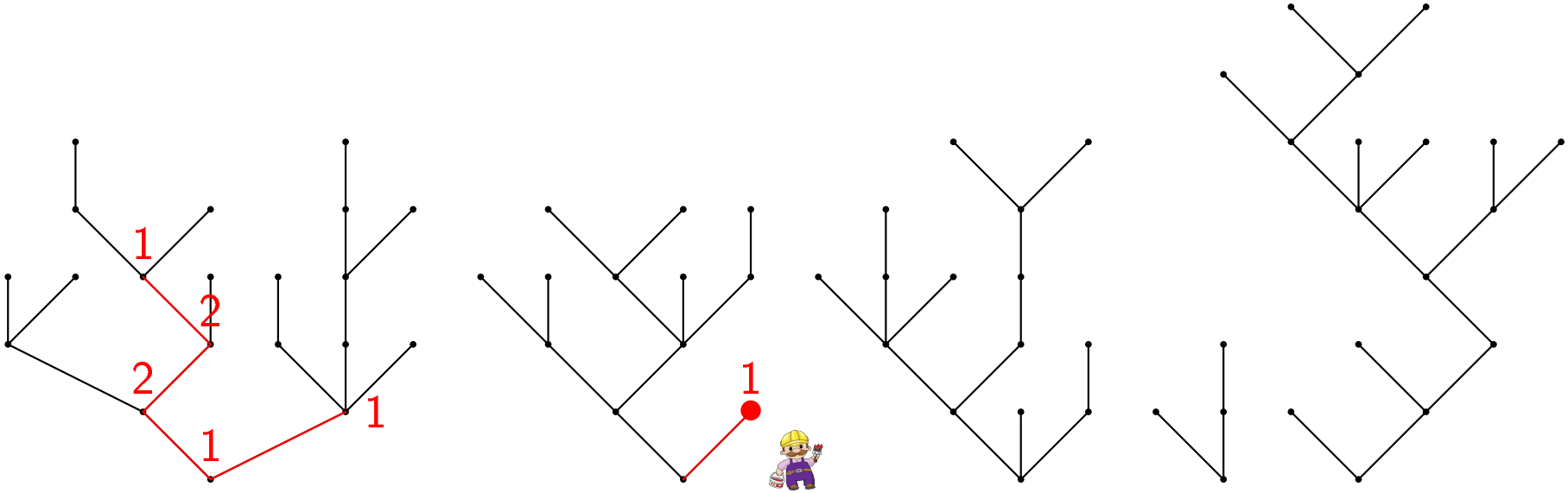
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



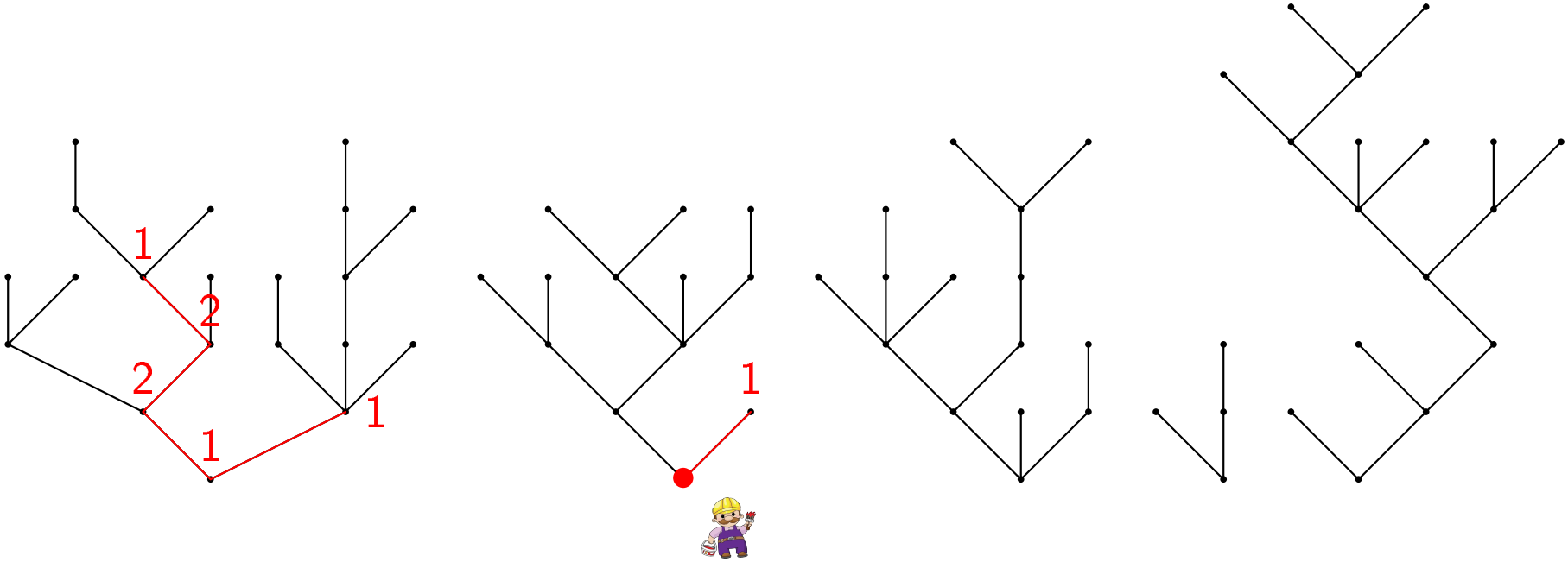
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



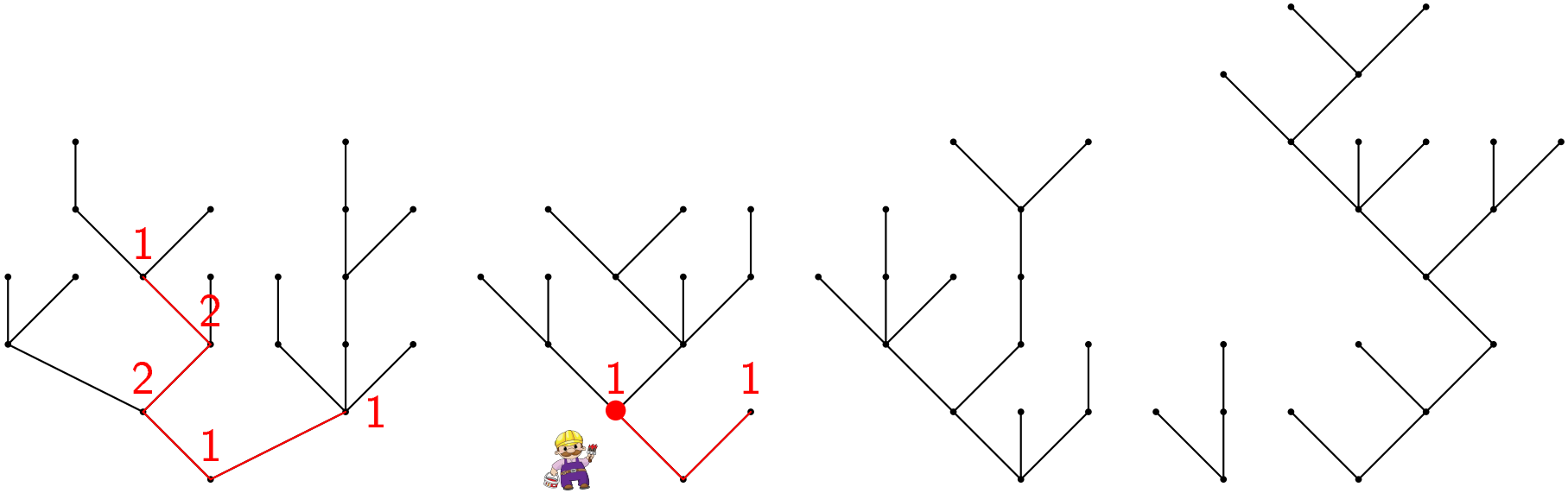
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



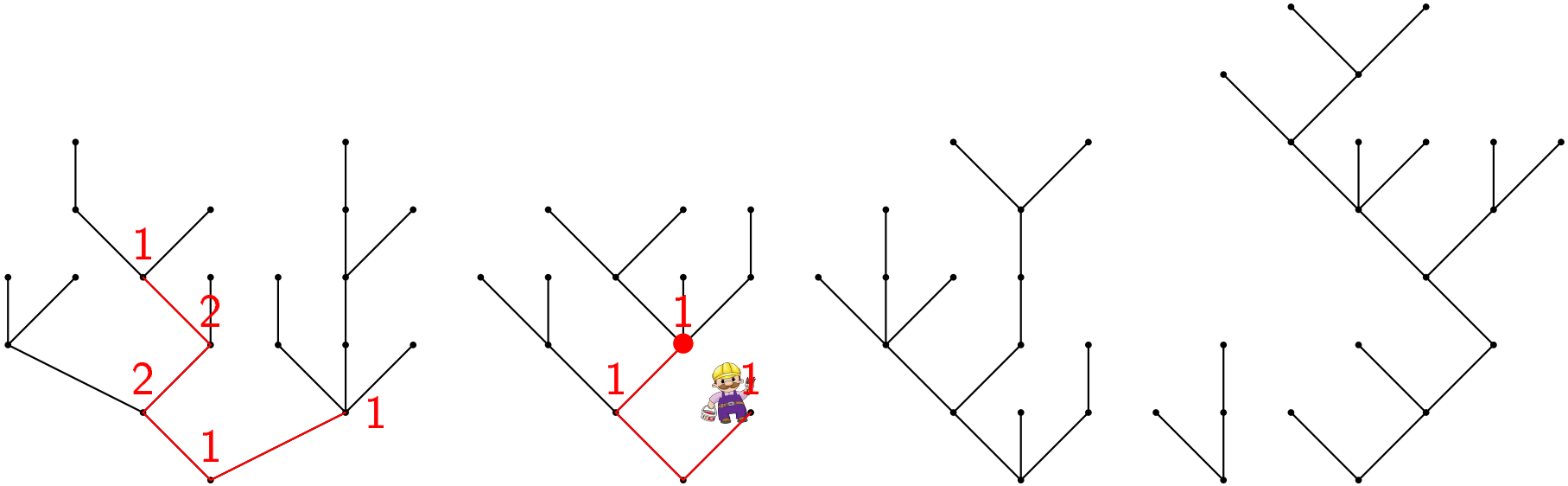
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



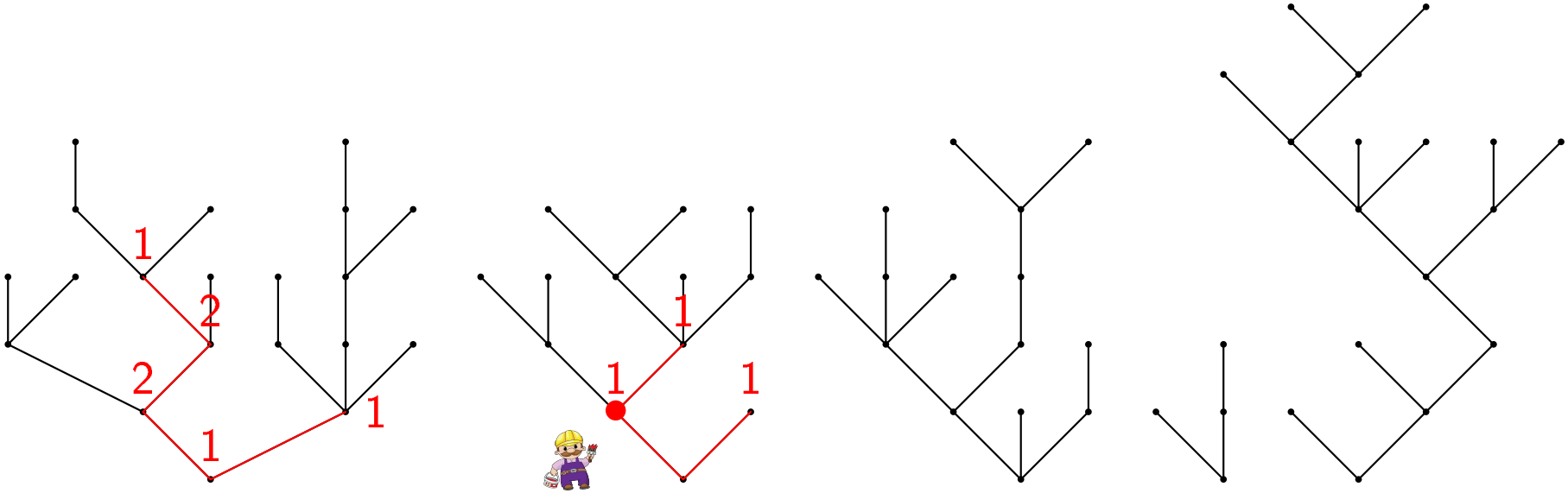
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



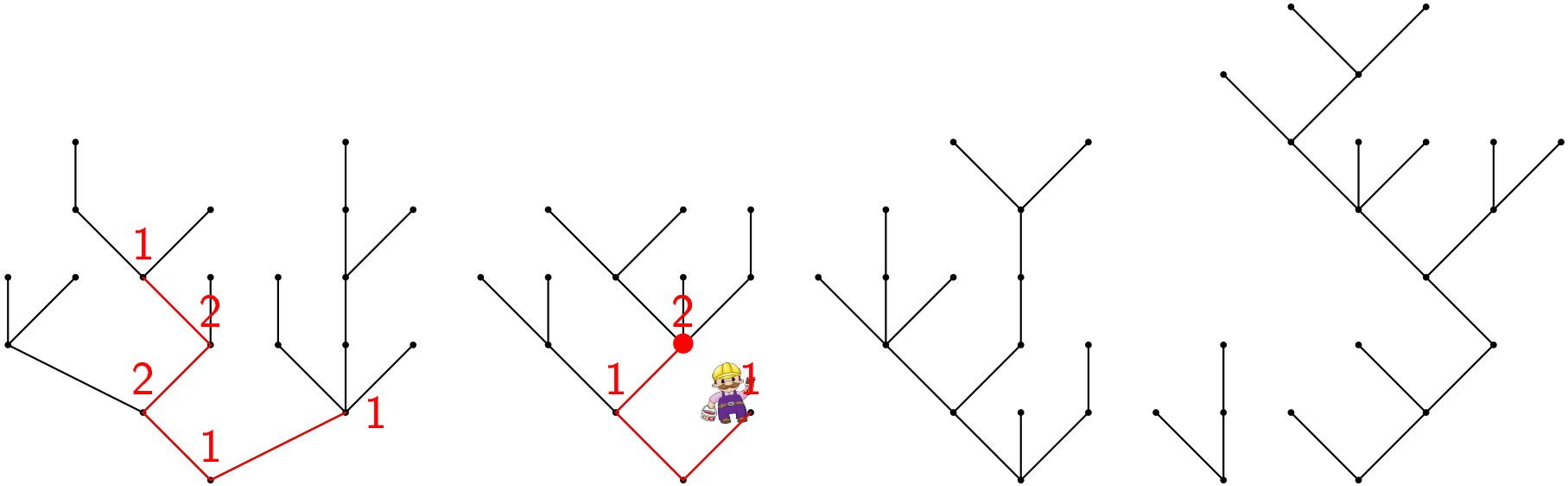
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



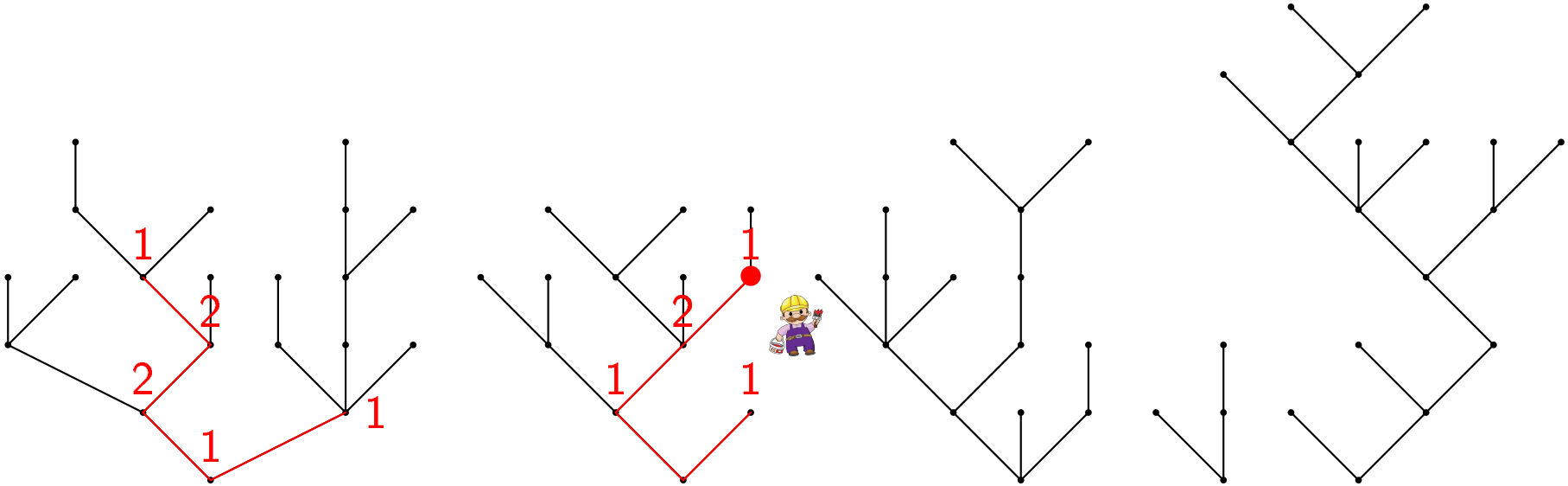
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



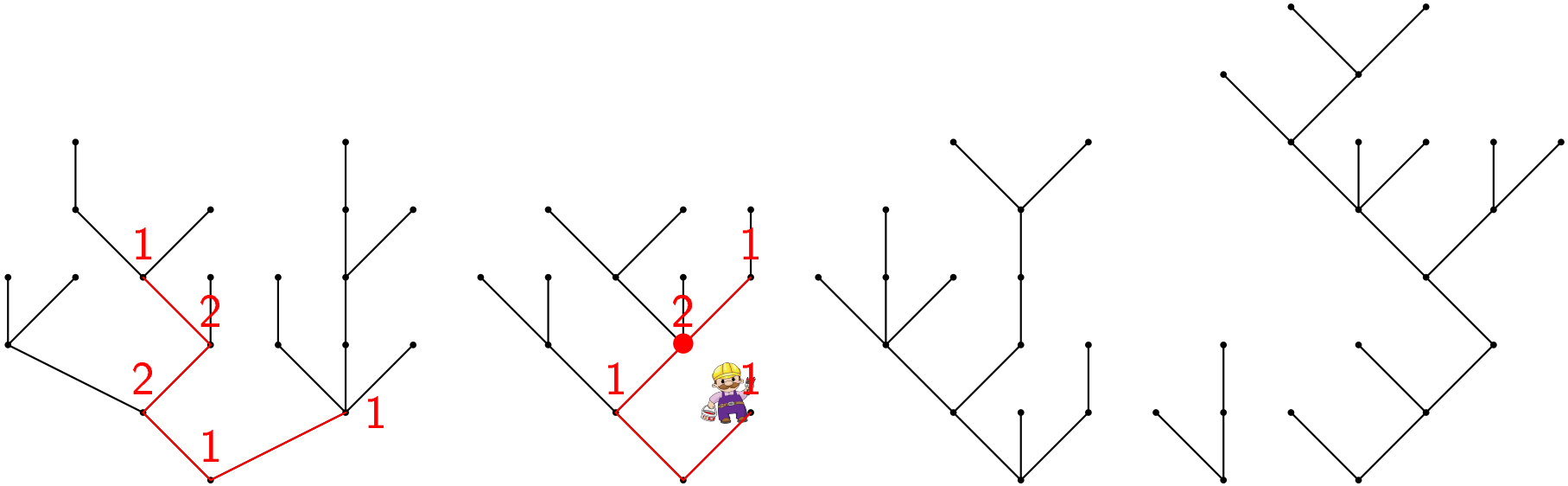
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



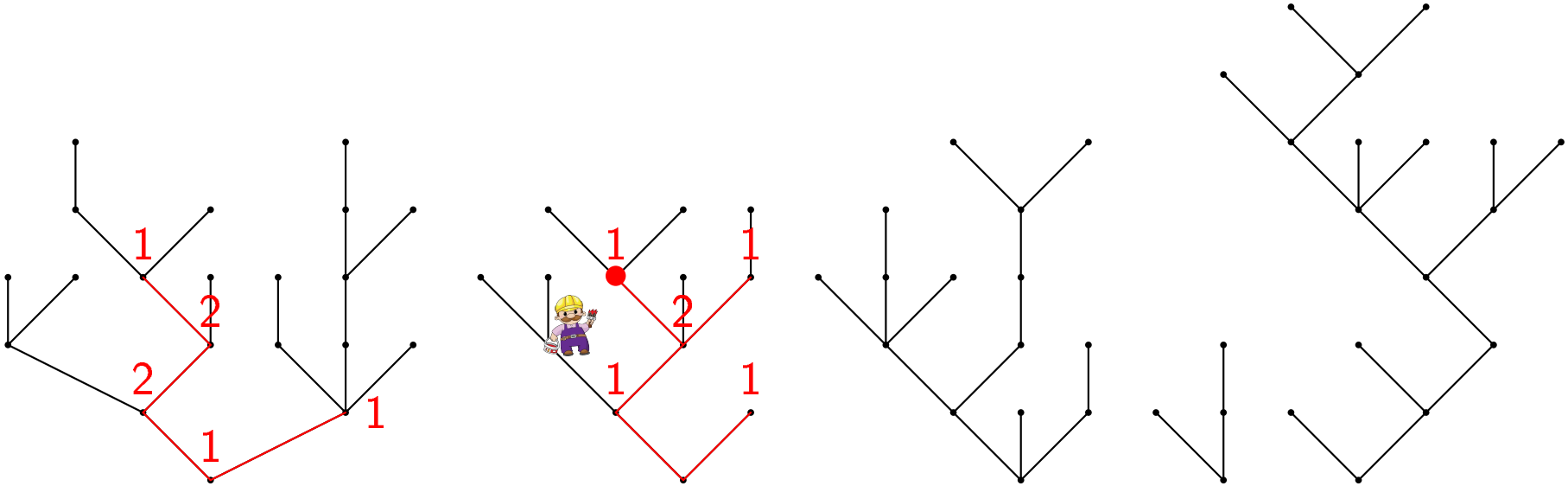
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



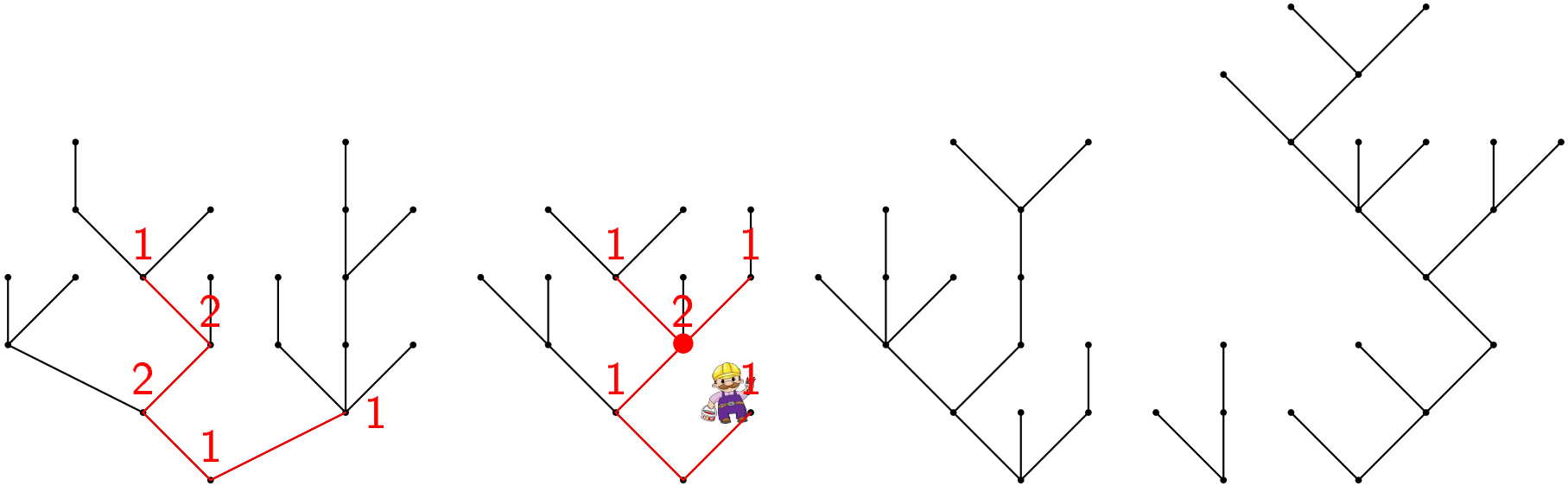
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



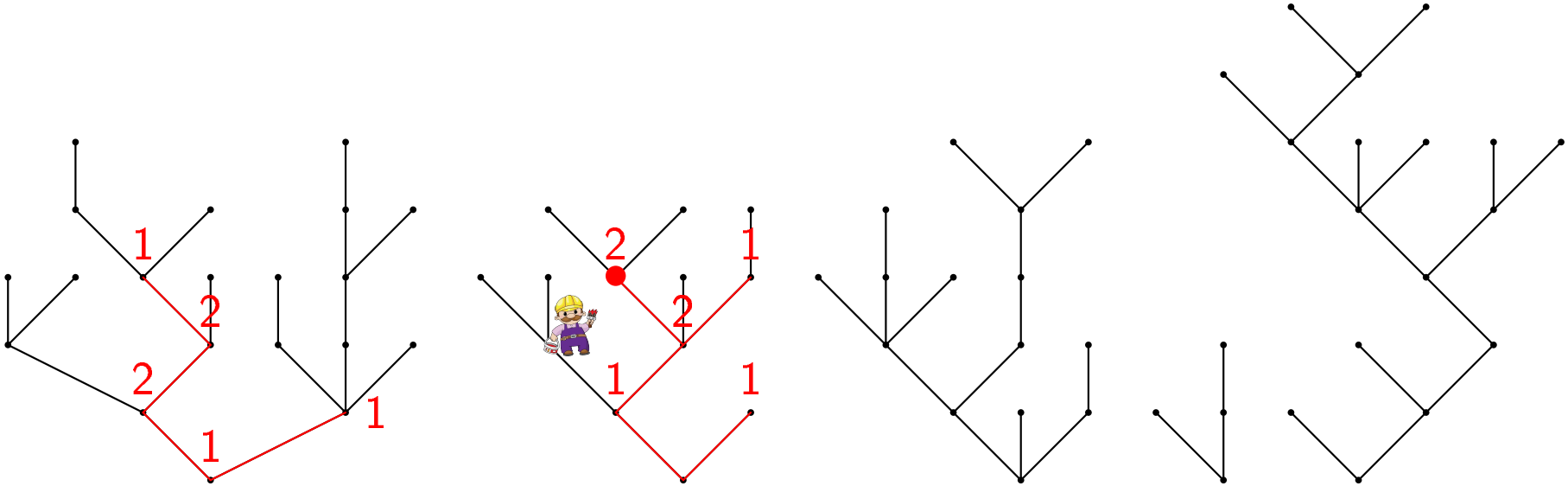
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



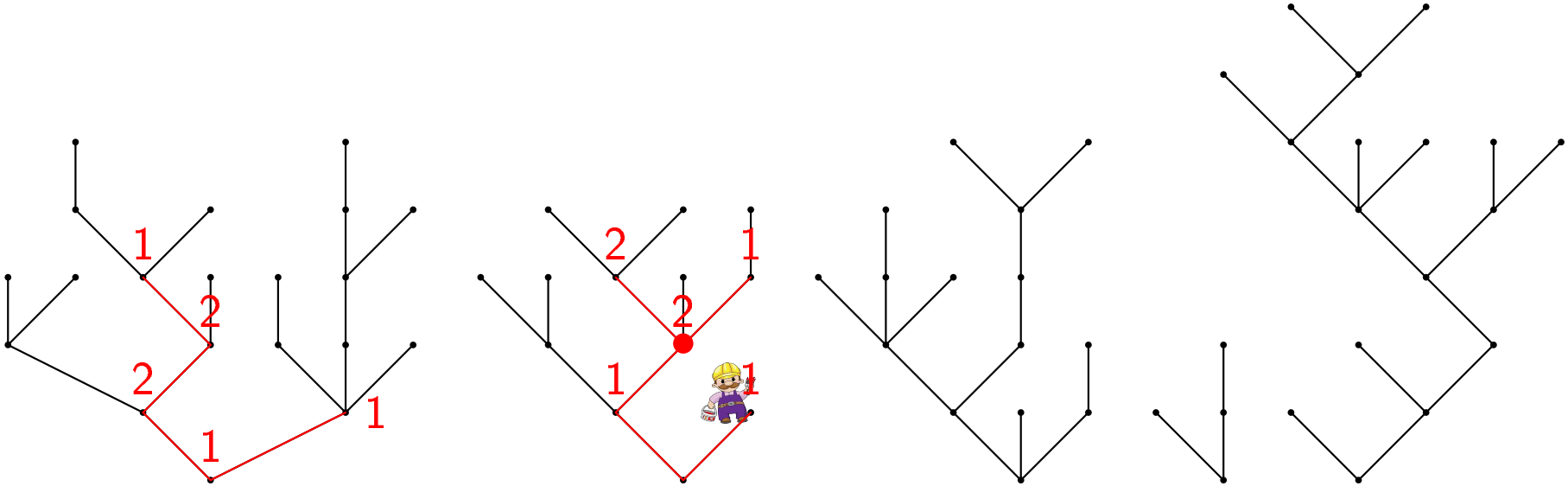
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



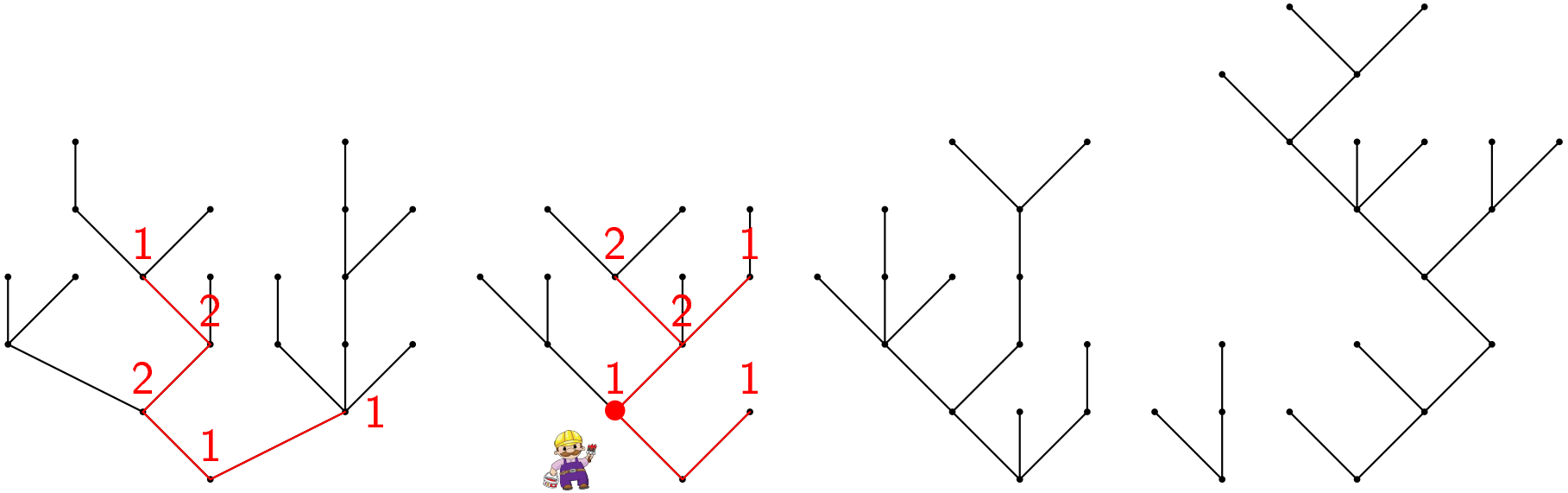
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



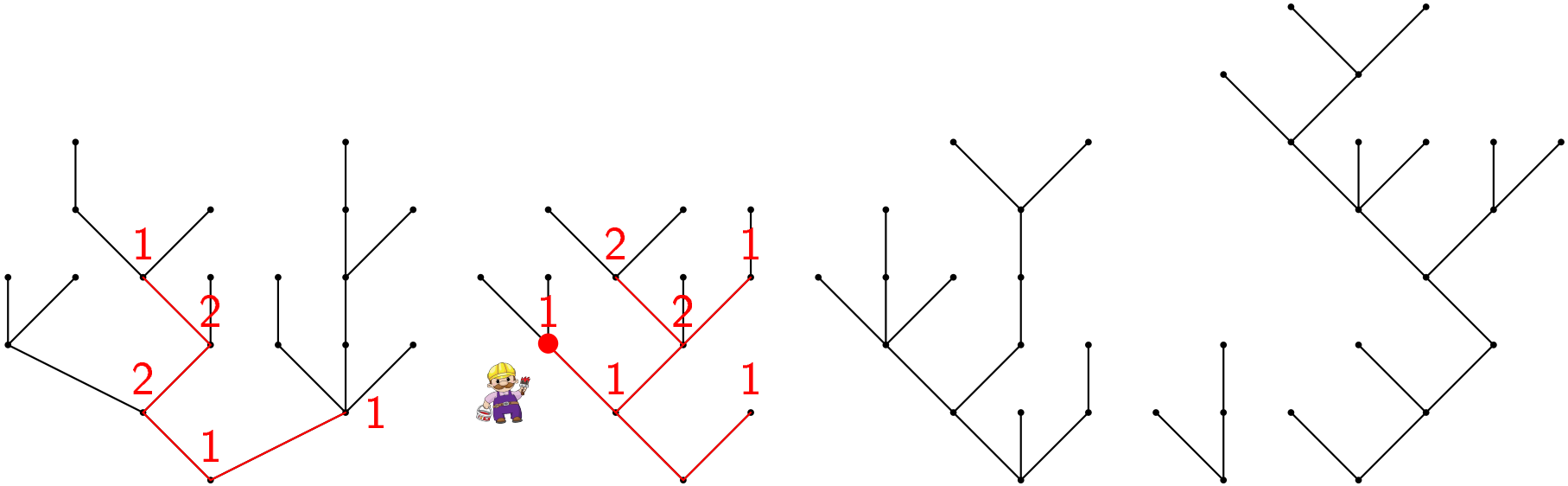
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



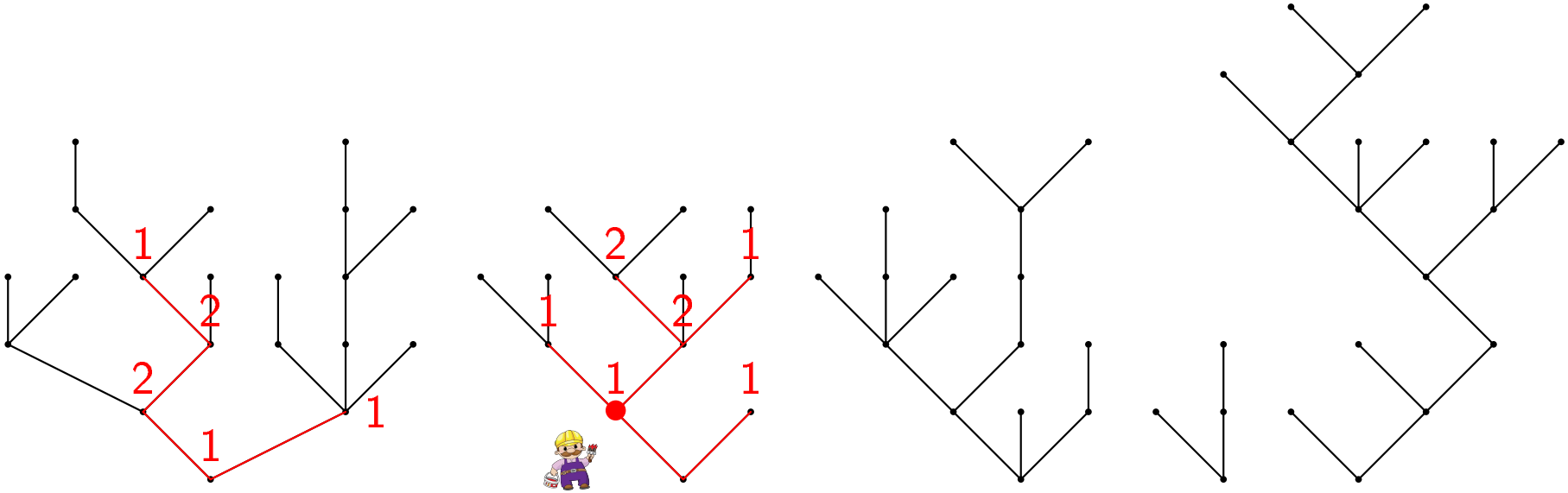
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



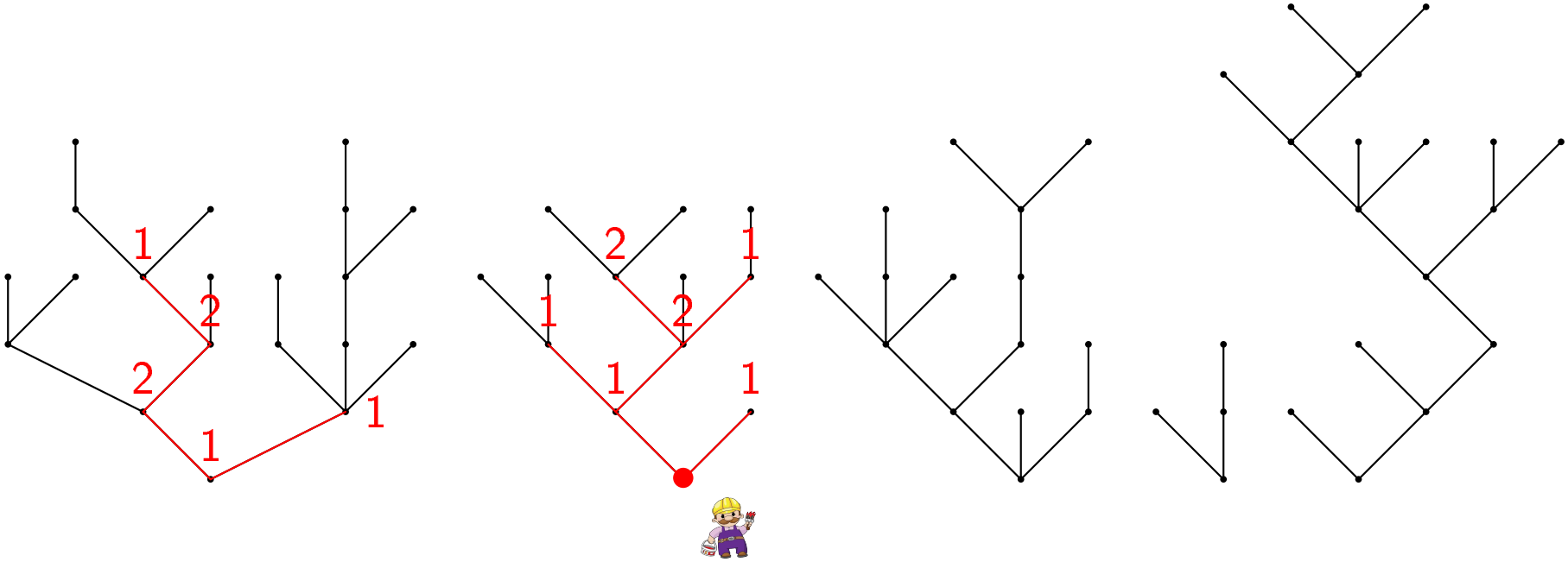
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



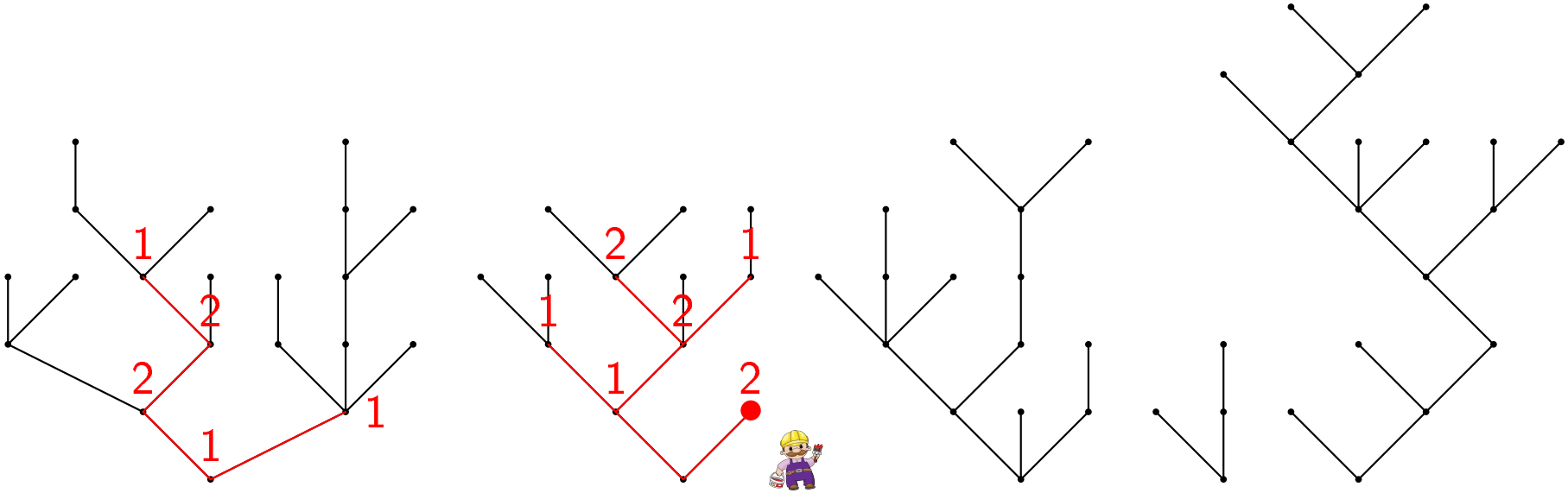
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



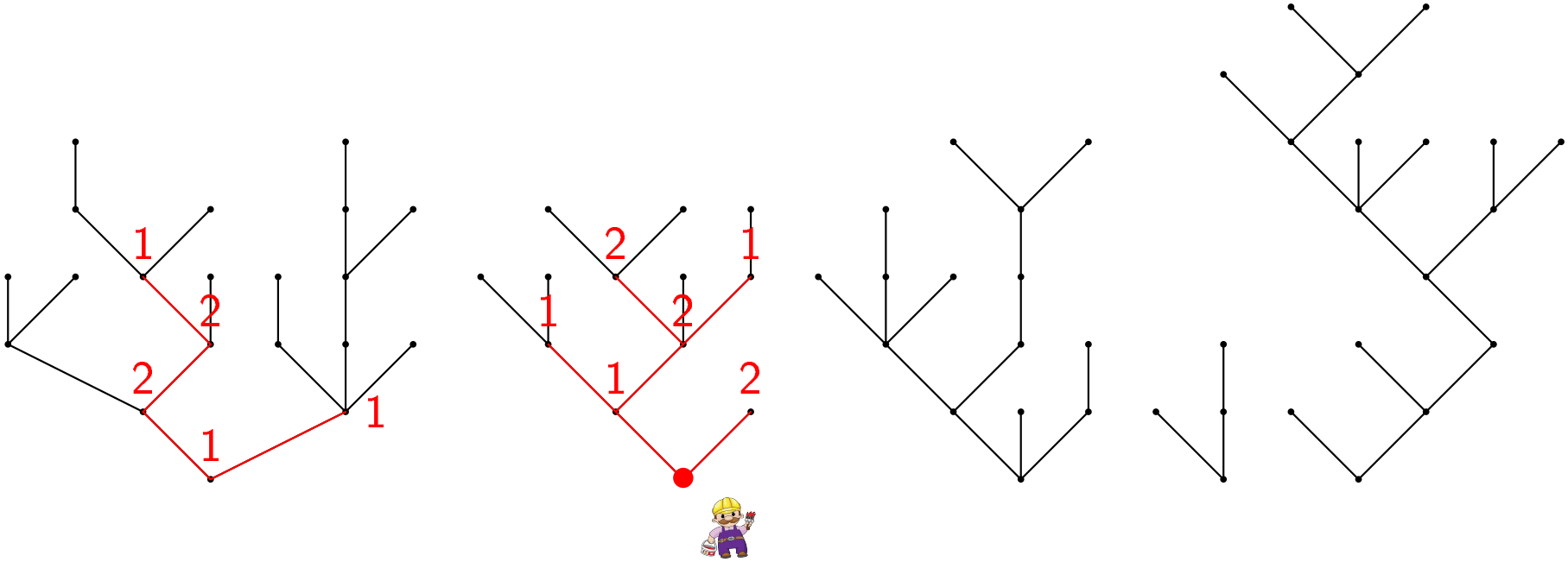
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



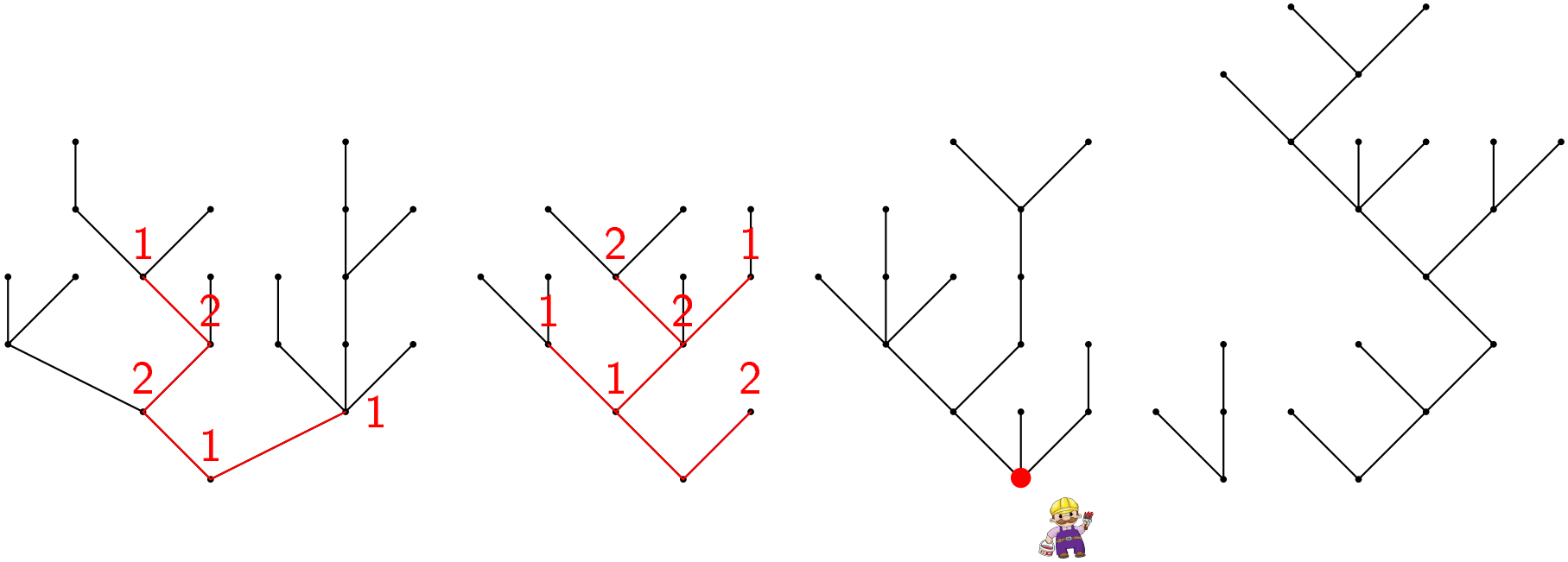
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



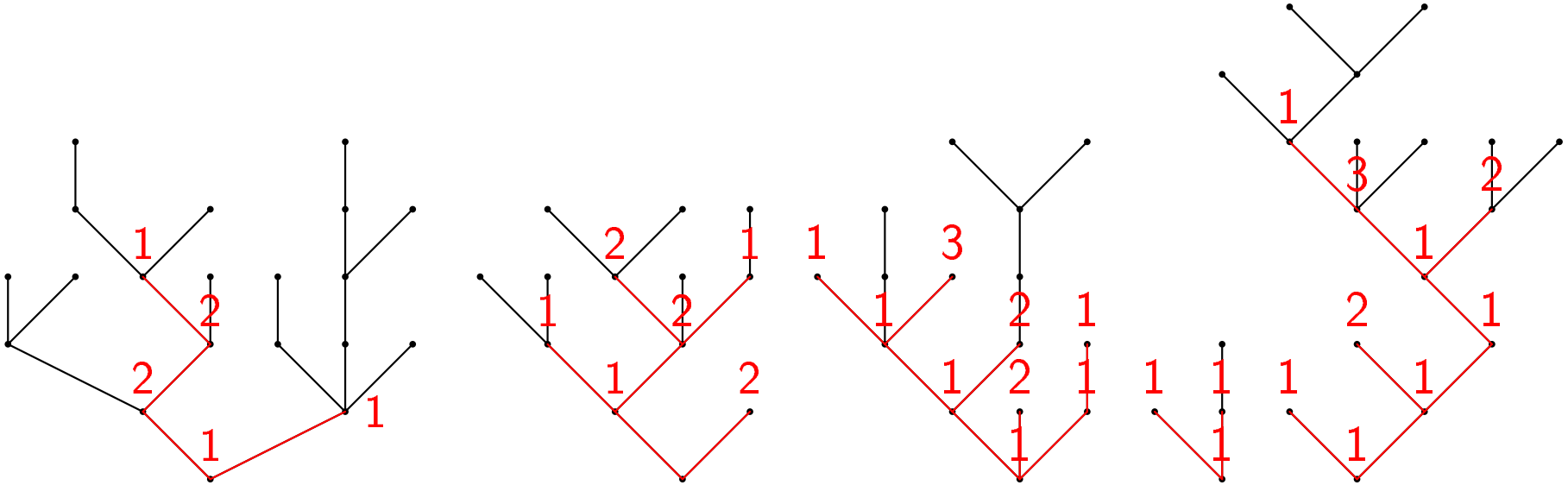
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



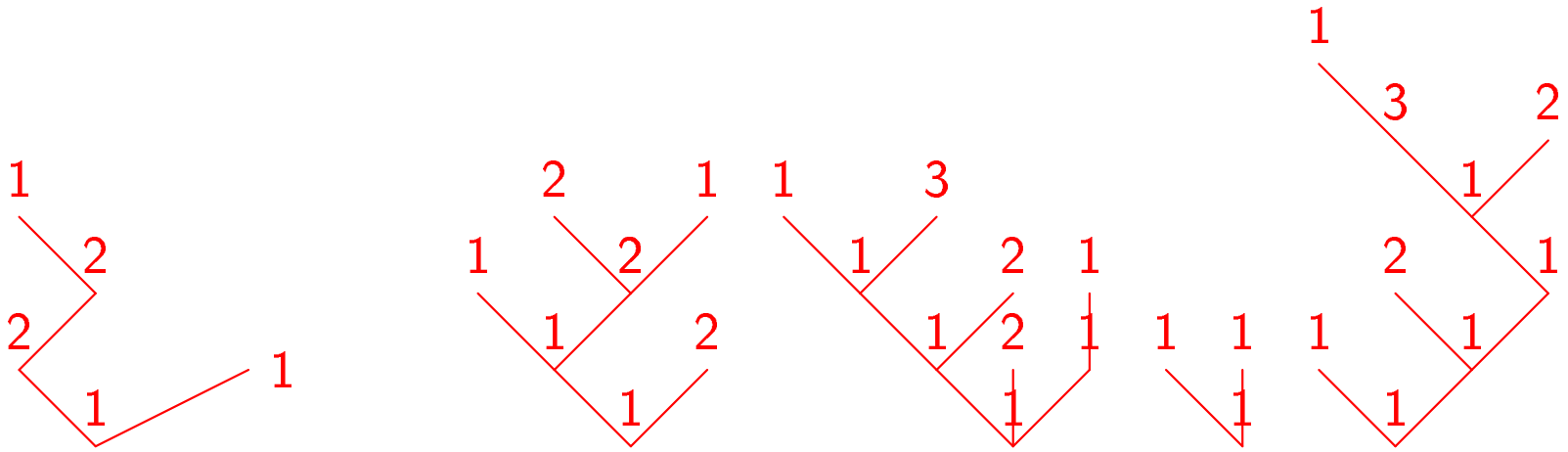
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



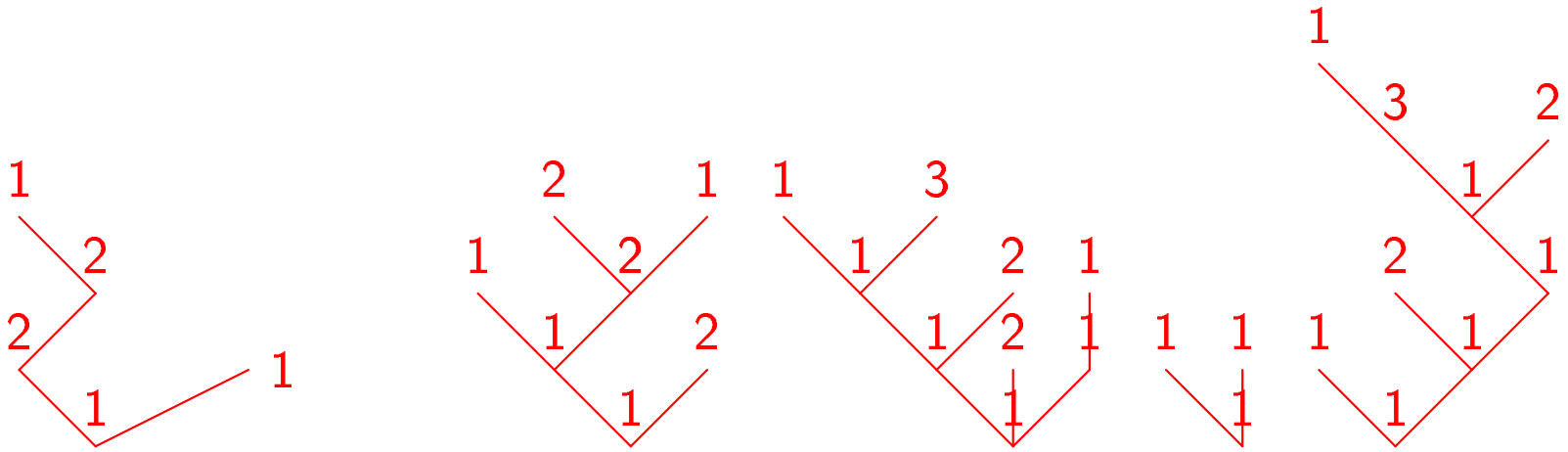
On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



On marque $(\mathcal{T})$ la trace de $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ : chaque sommet $x \in \mathcal{T}$ est marqué avec $\beta(x)$ le nombre de visites faites par $(X_n^{\mathbb{F}})_{n\in\mathbb{N}}$ depuis son parent.



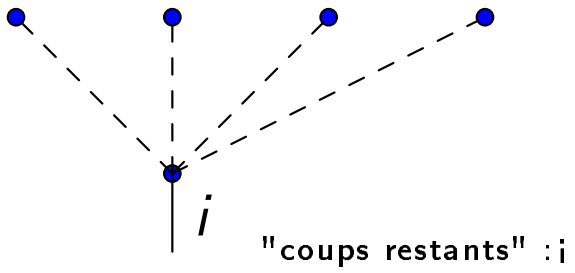
Quelle est la loi de l'arbre marqué $(\mathcal{T}, \beta)$ ?

# Nature de $\mathcal{T}$

Il s'avère que sous $\mathbf{P}_{\mu,\lambda}$, $(\mathcal{T}, \beta)$ a la loi d'une forêt de Galton-Watson multitype.

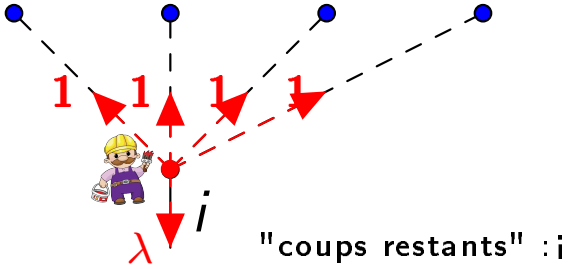
# Nature de $\mathcal{T}$

Il s'avère que sous $\mathbf{P}_{\mu,\lambda}$, $(\mathcal{T}, \beta)$ a la loi d'une forêt de Galton-Watson multitype.



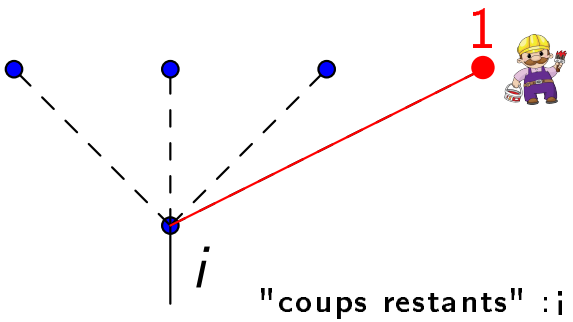
# Nature de $\mathcal{T}$

Il s'avère que sous $\mathbf{P}_{\mu,\lambda}$, $(\mathcal{T}, \beta)$ a la loi d'une forêt de Galton-Watson multitype.



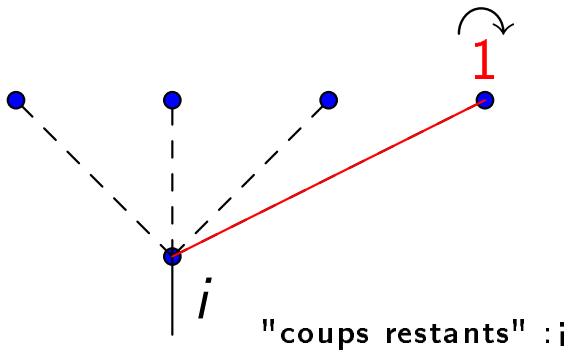
# Nature de $\mathcal{T}$

Il s'avère que sous $\mathbf{P}_{\mu,\lambda}$, $(\mathcal{T}, \beta)$ a la loi d'une forêt de Galton-Watson multitype.



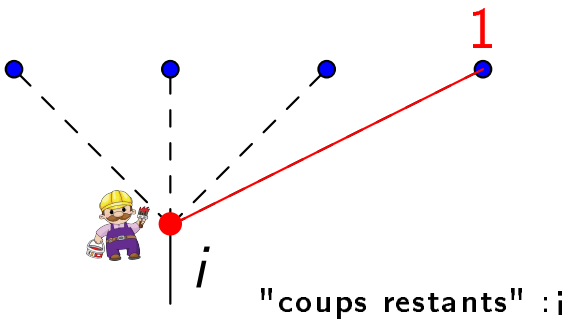
# Nature de $\mathcal{T}$

Il s'avère que sous $\mathbf{P}_{\mu,\lambda}$, $(\mathcal{T}, \beta)$ a la loi d'une forêt de Galton-Watson multitype.



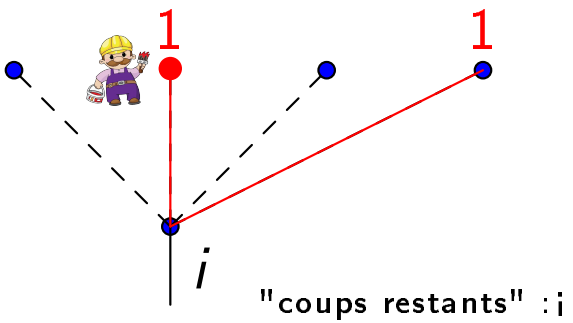
# Nature de $\mathcal{T}$

Il s'avère que sous $\mathbf{P}_{\mu,\lambda}$, $(\mathcal{T}, \beta)$ a la loi d'une forêt de Galton-Watson multitype.



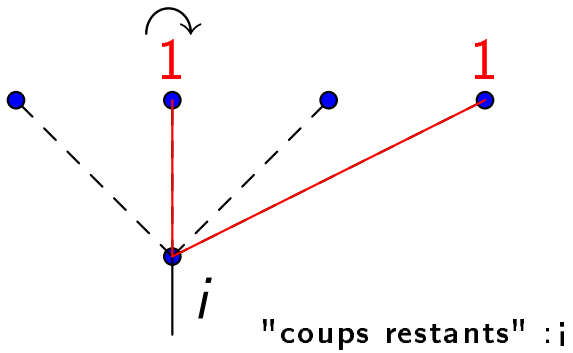
# Nature de $\mathcal{T}$

Il s'avère que sous $\mathbf{P}_{\mu,\lambda}$, $(\mathcal{T}, \beta)$ a la loi d'une forêt de Galton-Watson multitype.



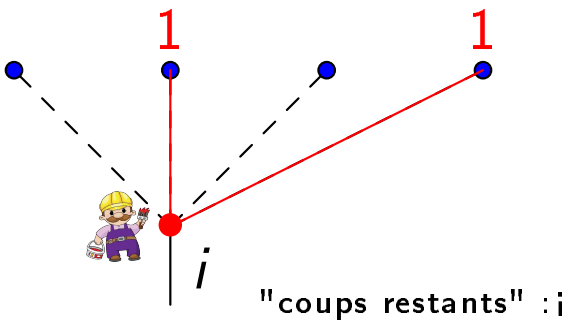
# Nature de $\mathcal{T}$

Il s'avère que sous $\mathbf{P}_{\mu,\lambda}$, $(\mathcal{T}, \beta)$ a la loi d'une forêt de Galton-Watson multitype.



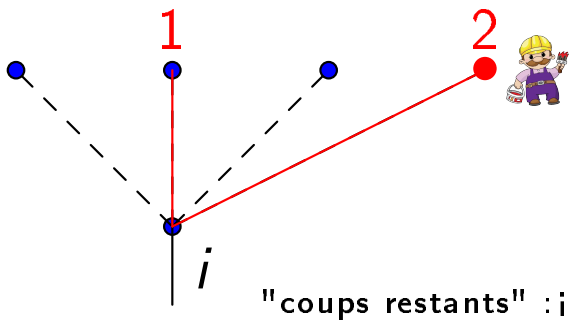
# Nature de $\mathcal{T}$

Il s'avère que sous $\mathbf{P}_{\mu,\lambda}$, $(\mathcal{T}, \beta)$ a la loi d'une forêt de Galton-Watson multitype.



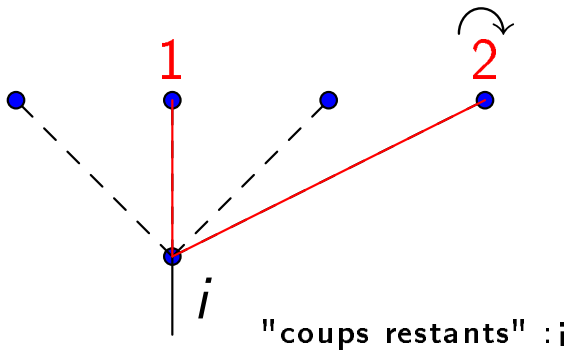
# Nature de $\mathcal{T}$

Il s'avère que sous $\mathbf{P}_{\mu,\lambda}$, $(\mathcal{T}, \beta)$ a la loi d'une forêt de Galton-Watson multitype.



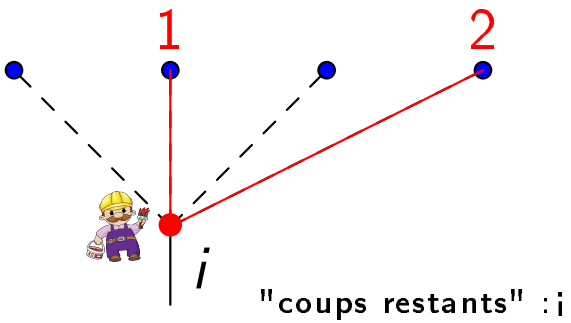
# Nature de $\mathcal{T}$

Il s'avère que sous $\mathbf{P}_{\mu,\lambda}$, $(\mathcal{T}, \beta)$ a la loi d'une forêt de Galton-Watson multitype.



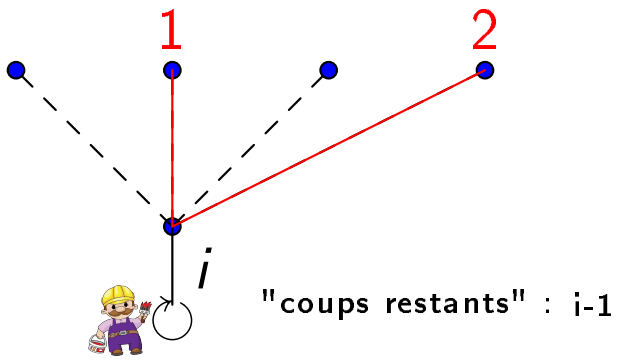
# Nature de $\mathcal{T}$

Il s'avère que sous $\mathbf{P}_{\mu,\lambda}$, $(\mathcal{T}, \beta)$ a la loi d'une forêt de Galton-Watson multitype.



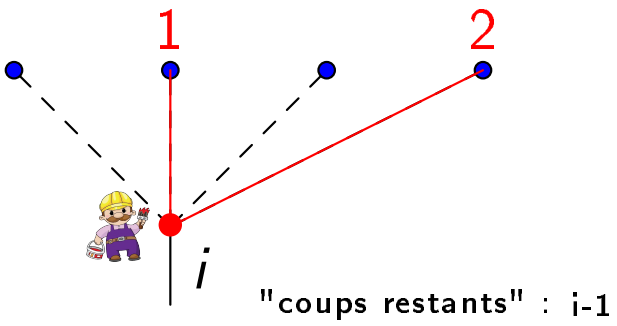
# Nature de $\mathcal{T}$

Il s'avère que sous $\mathbf{P}_{\mu,\lambda}$, $(\mathcal{T}, \beta)$ a la loi d'une forêt de Galton-Watson multitype.



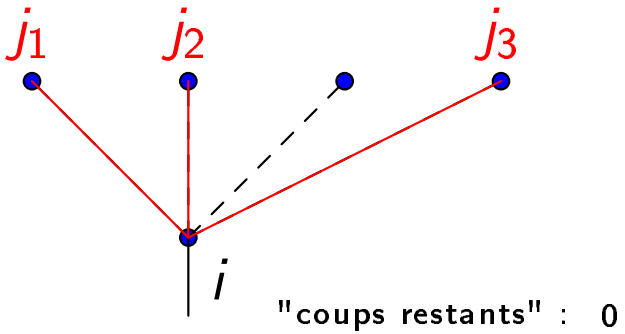
# Nature de $\mathcal{T}$

Il s'avère que sous $\mathbf{P}_{\mu,\lambda}$, $(\mathcal{T}, \beta)$ a la loi d'une forêt de Galton-Watson multitype.

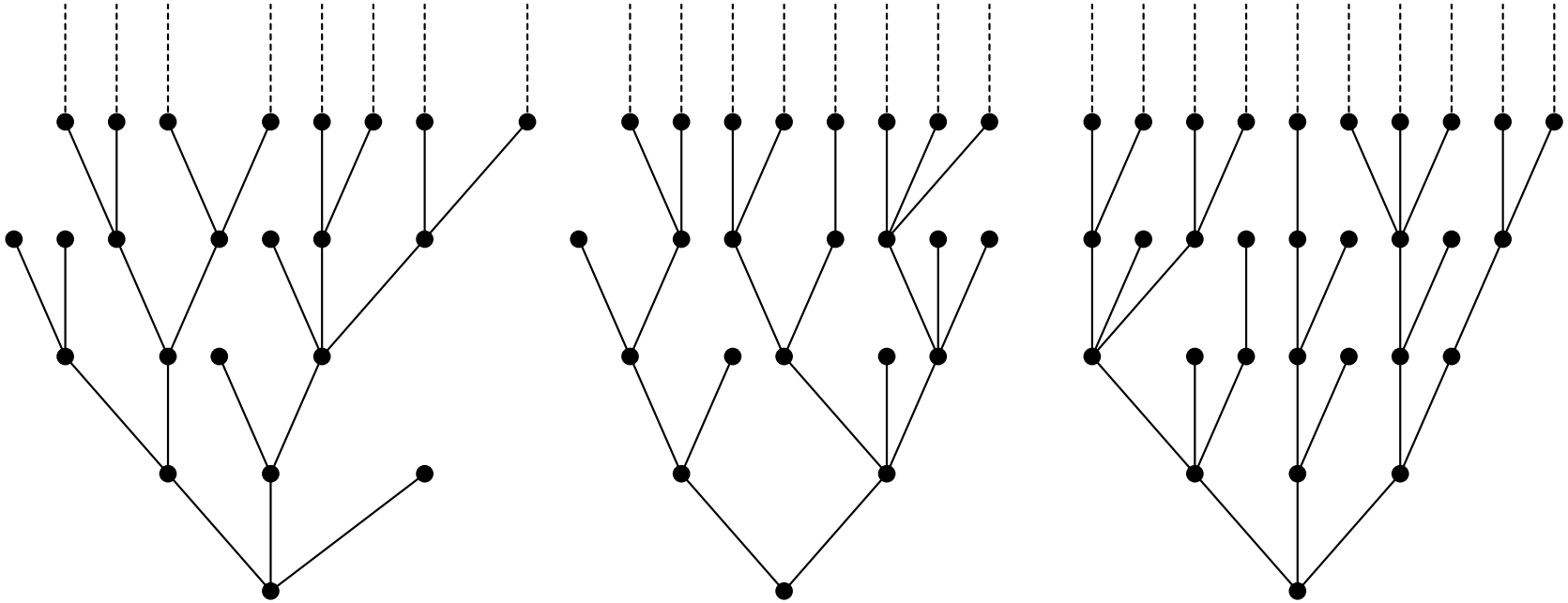


# Nature de $\mathcal{T}$

Il s'avère que sous $\mathbf{P}_{\mu,\lambda}$, $(\mathcal{T}, \beta)$ a la loi d'une forêt de Galton-Watson multitype.

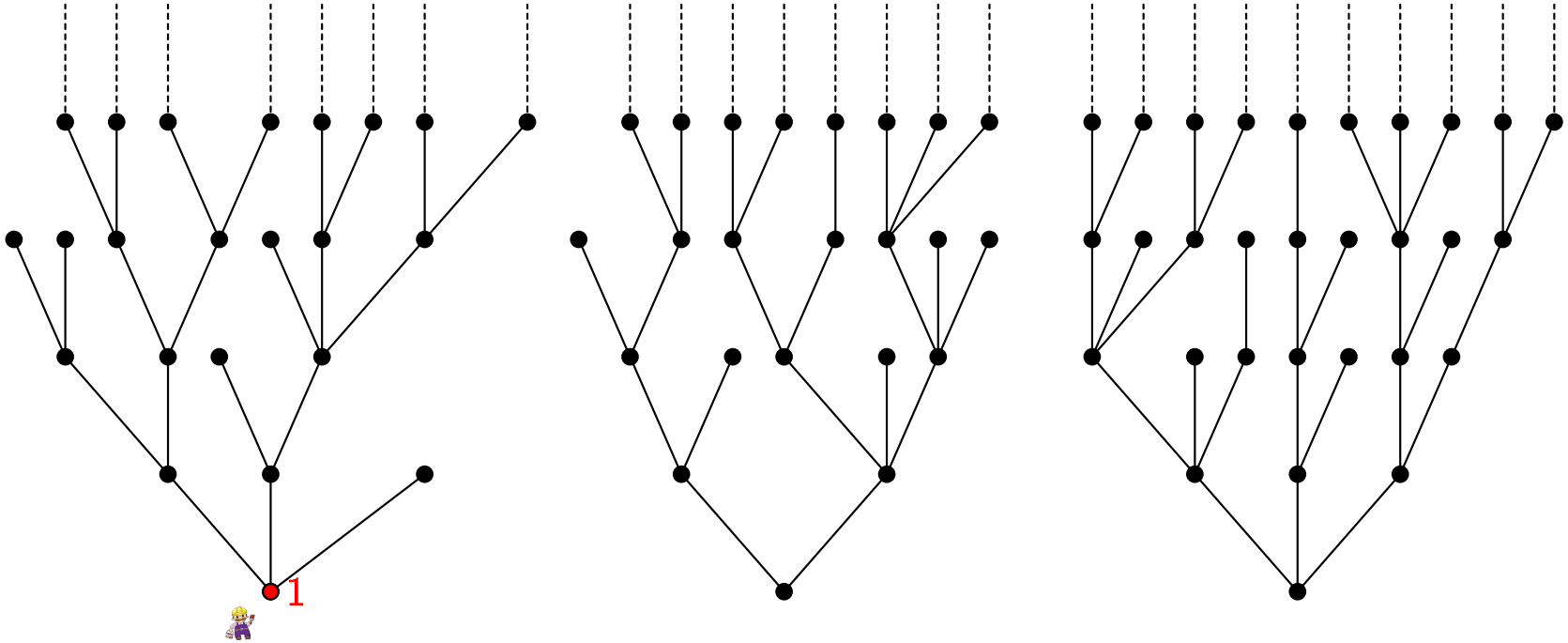


# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur



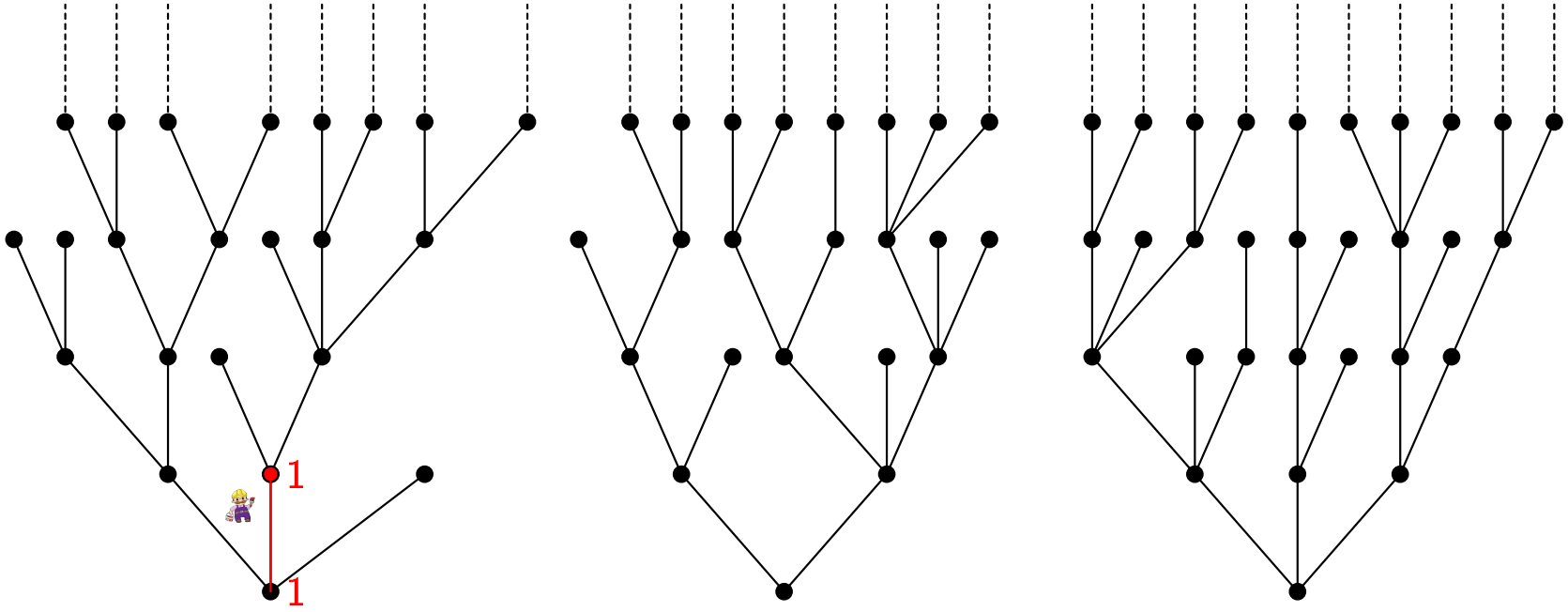
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



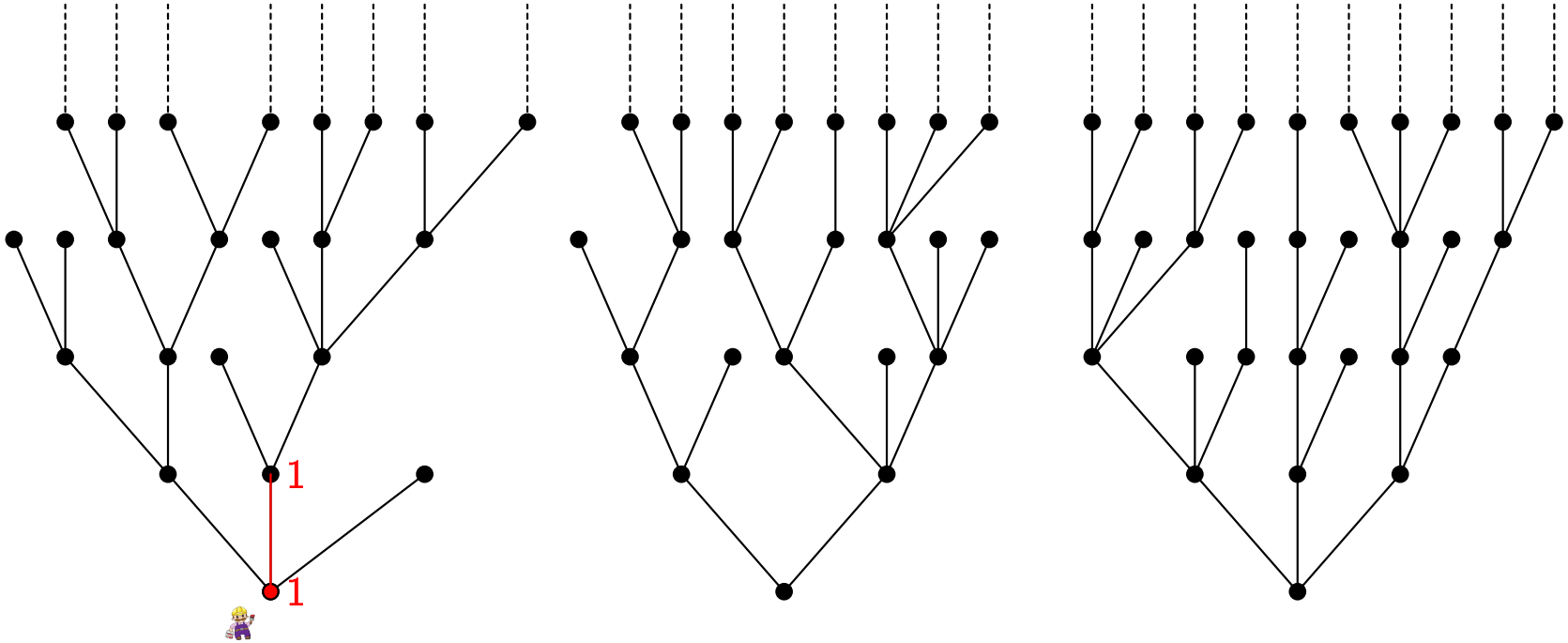
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



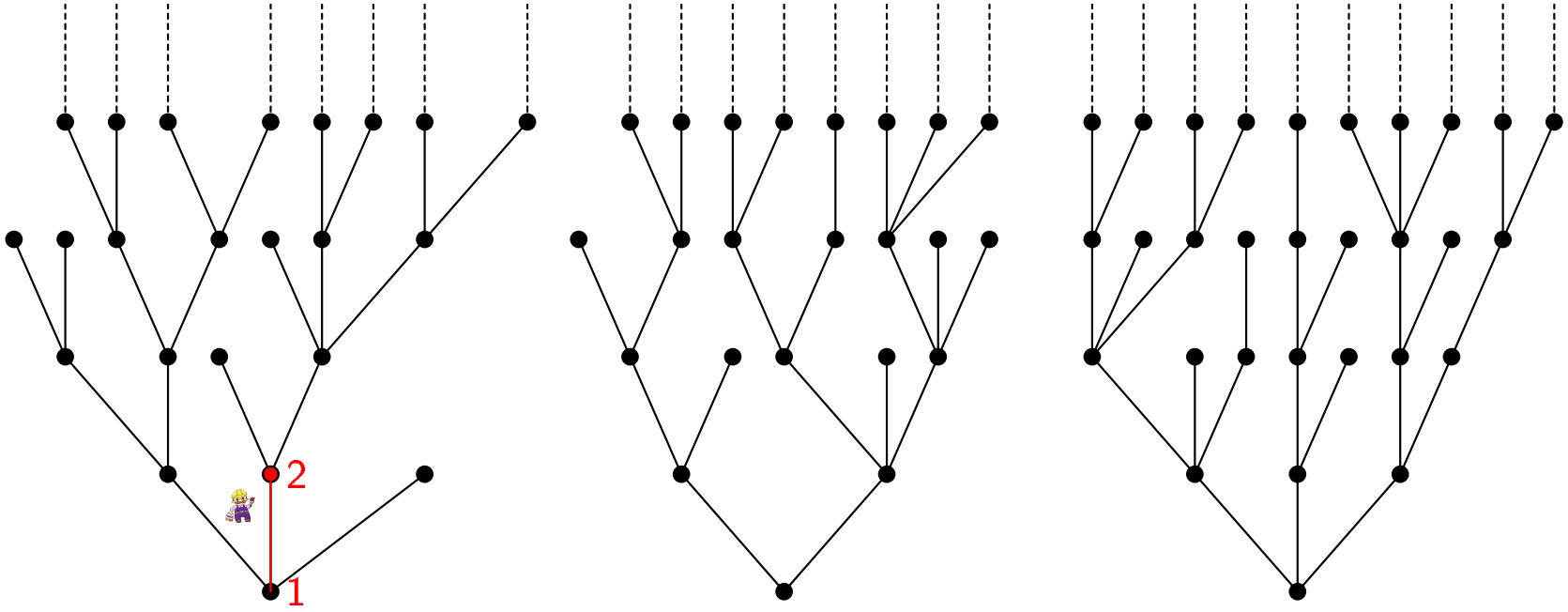
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



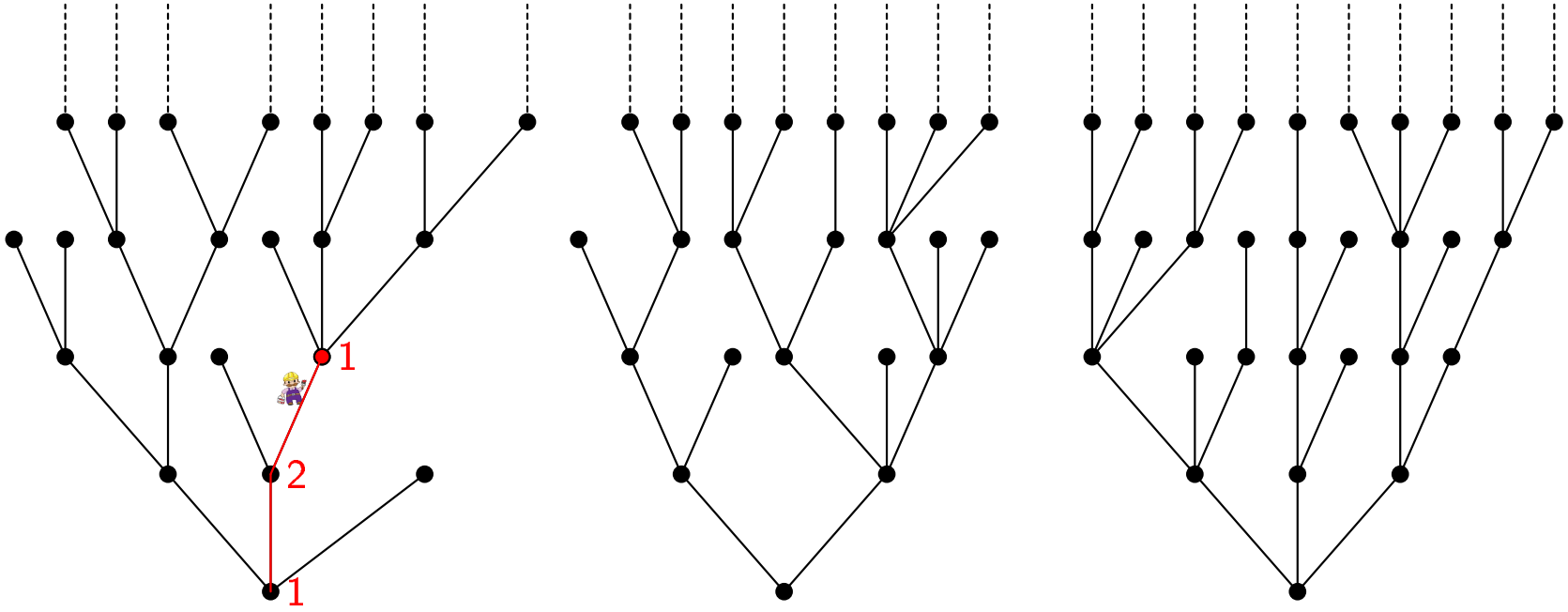
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



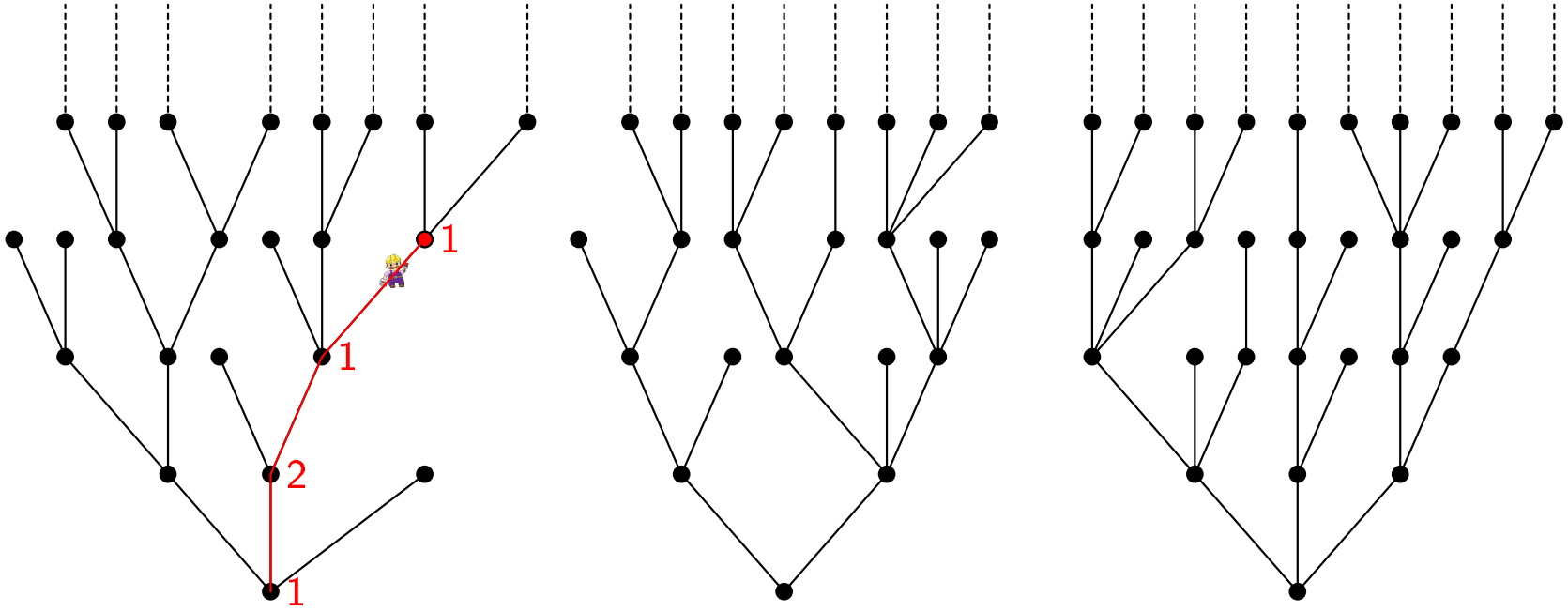
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



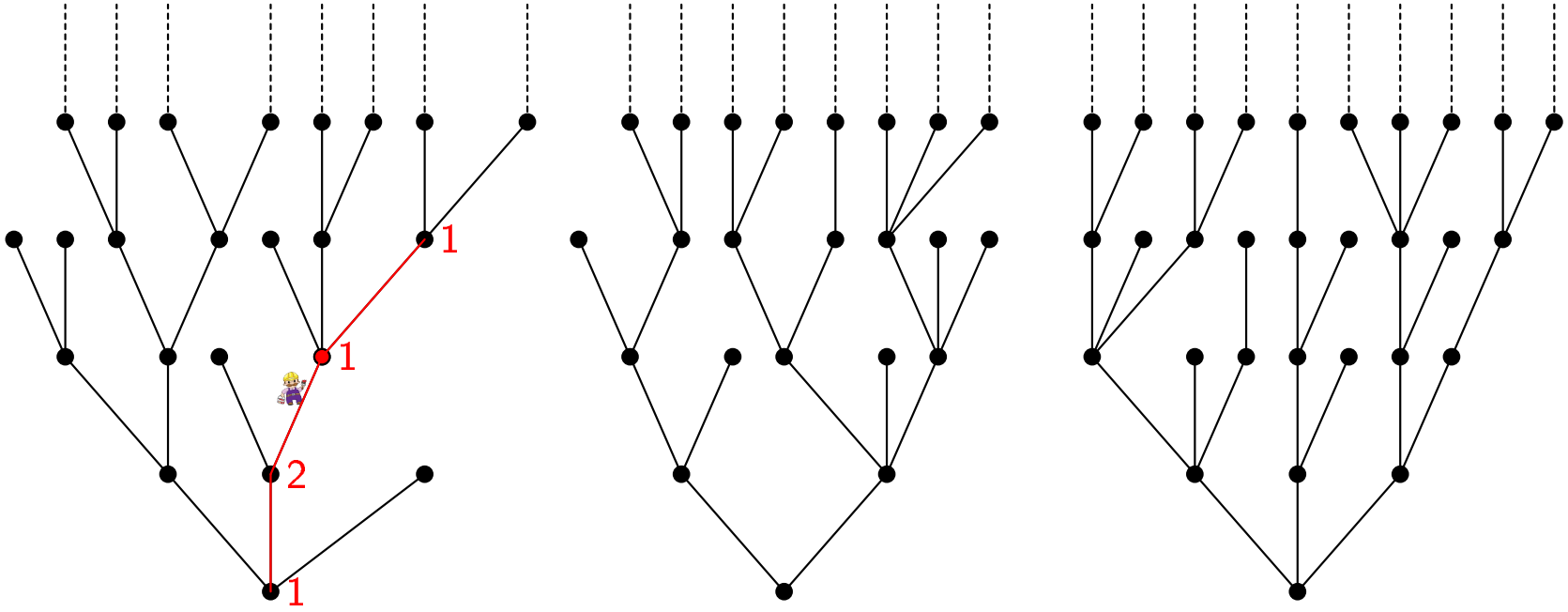
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



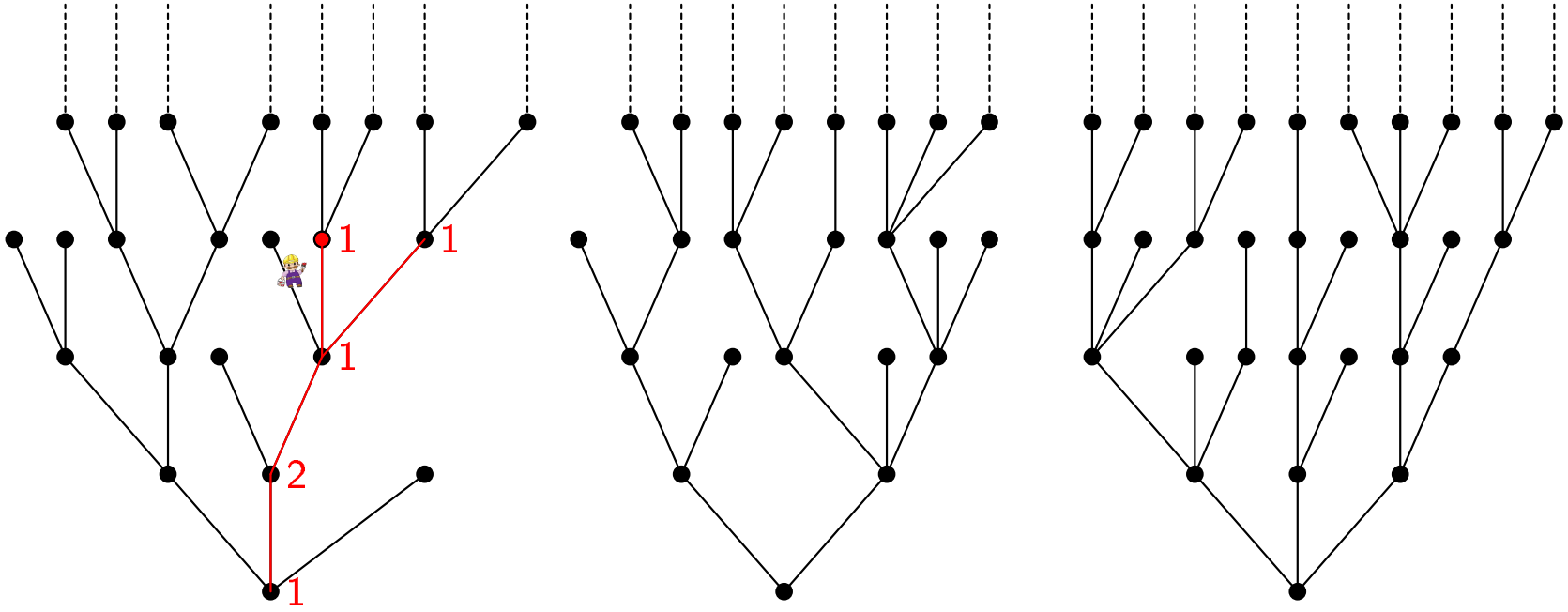
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



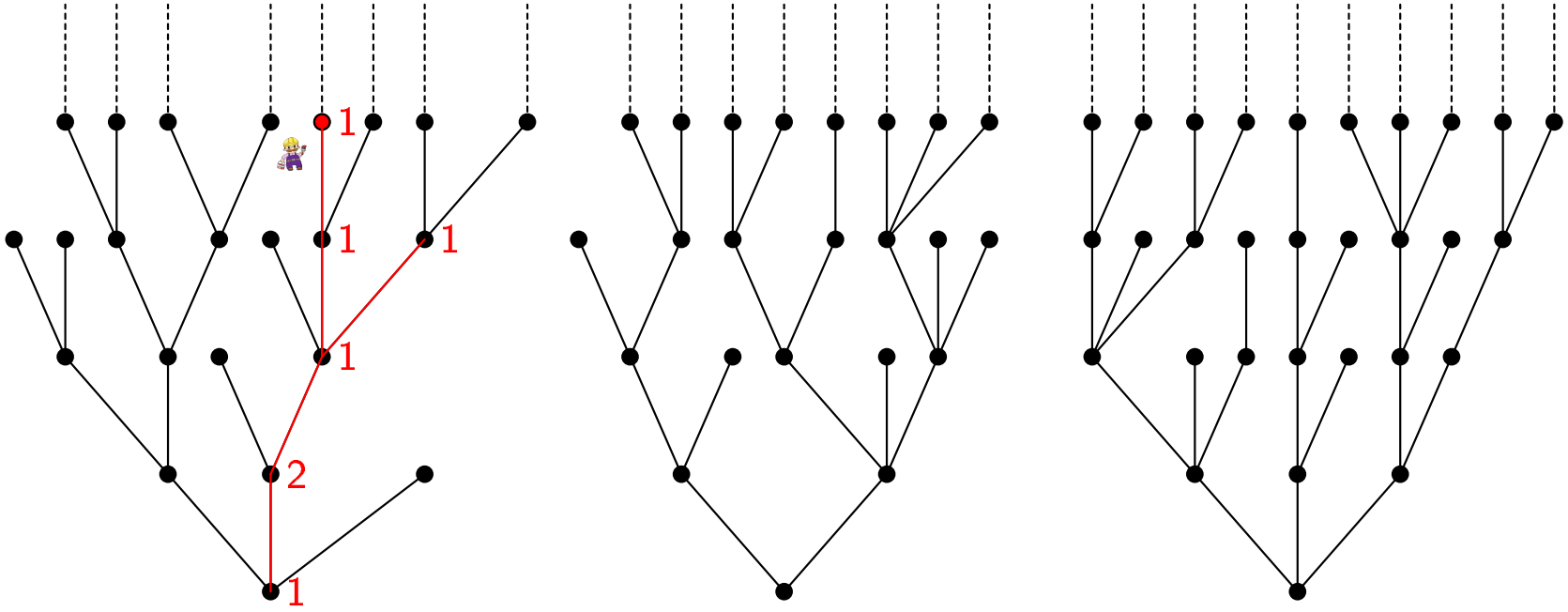
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



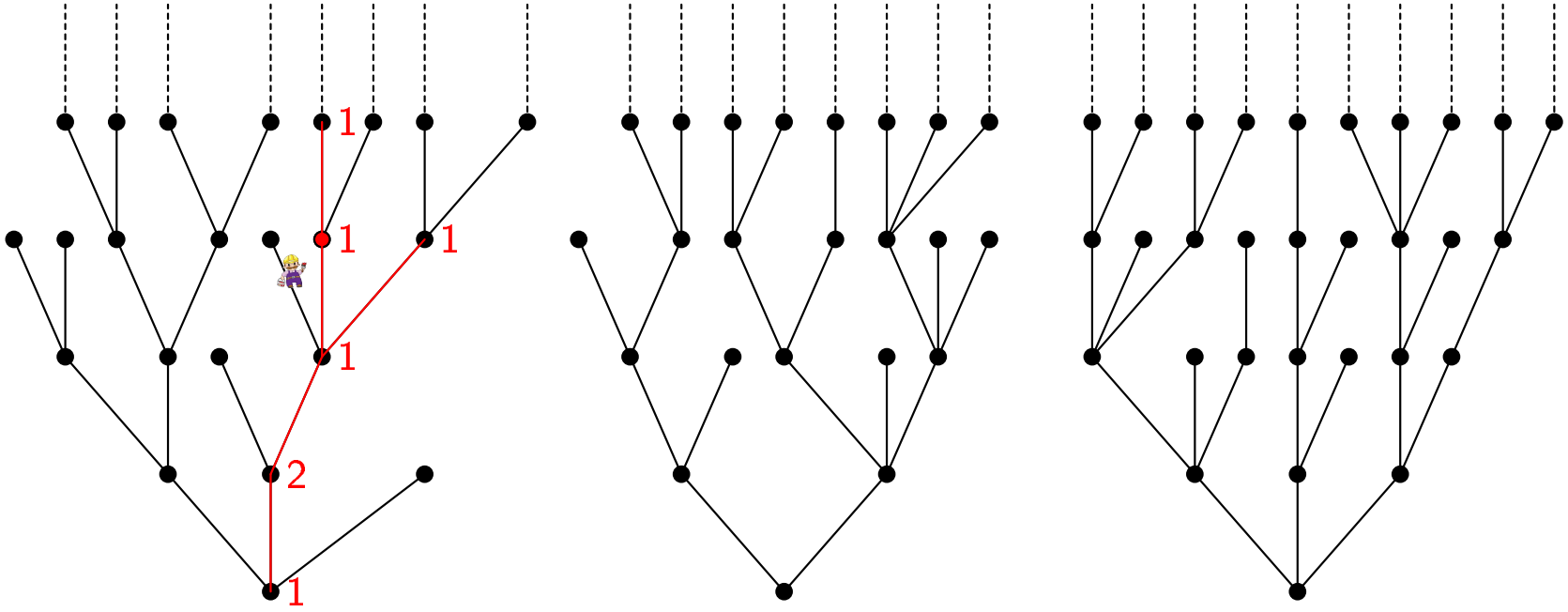
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



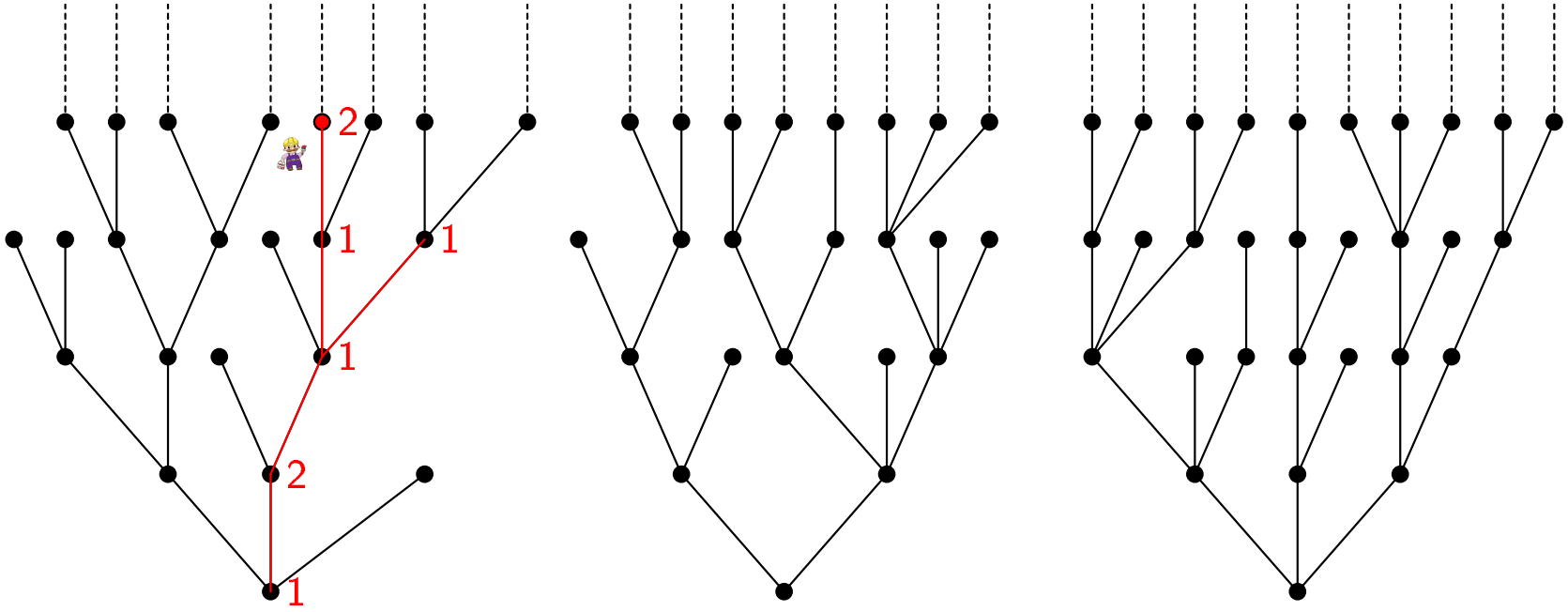
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



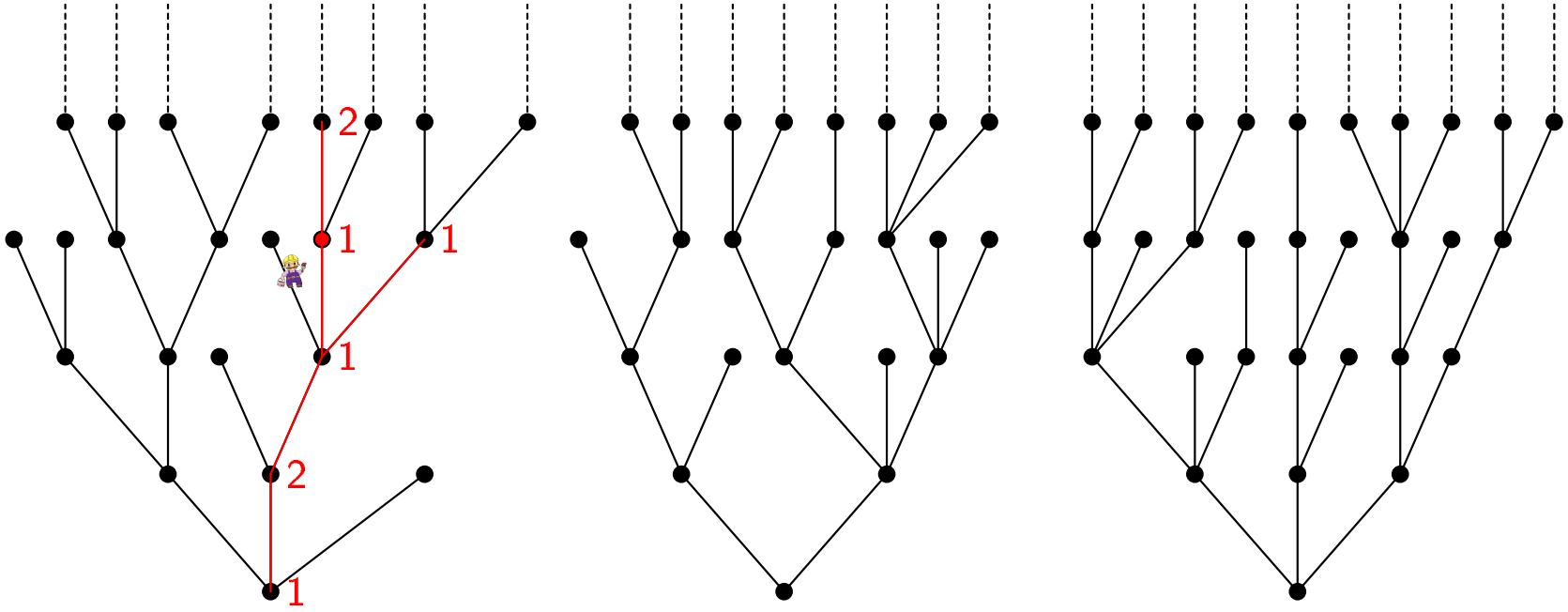
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



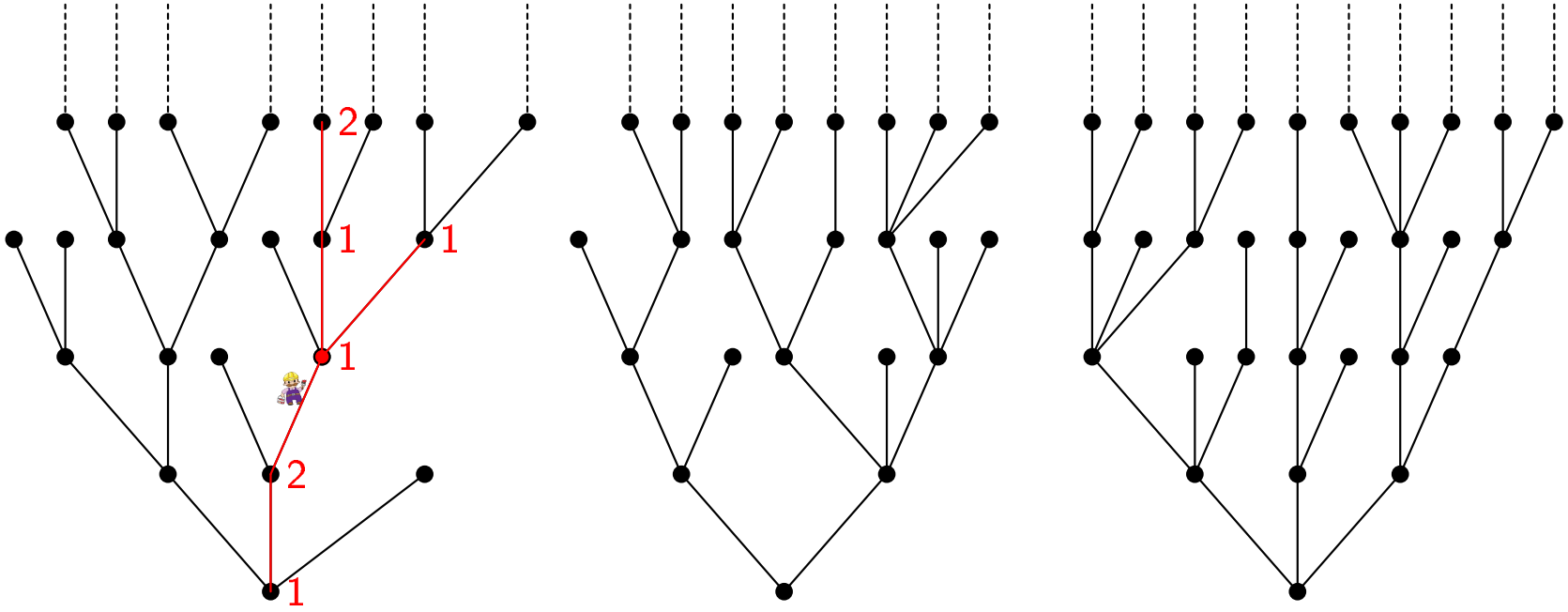
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



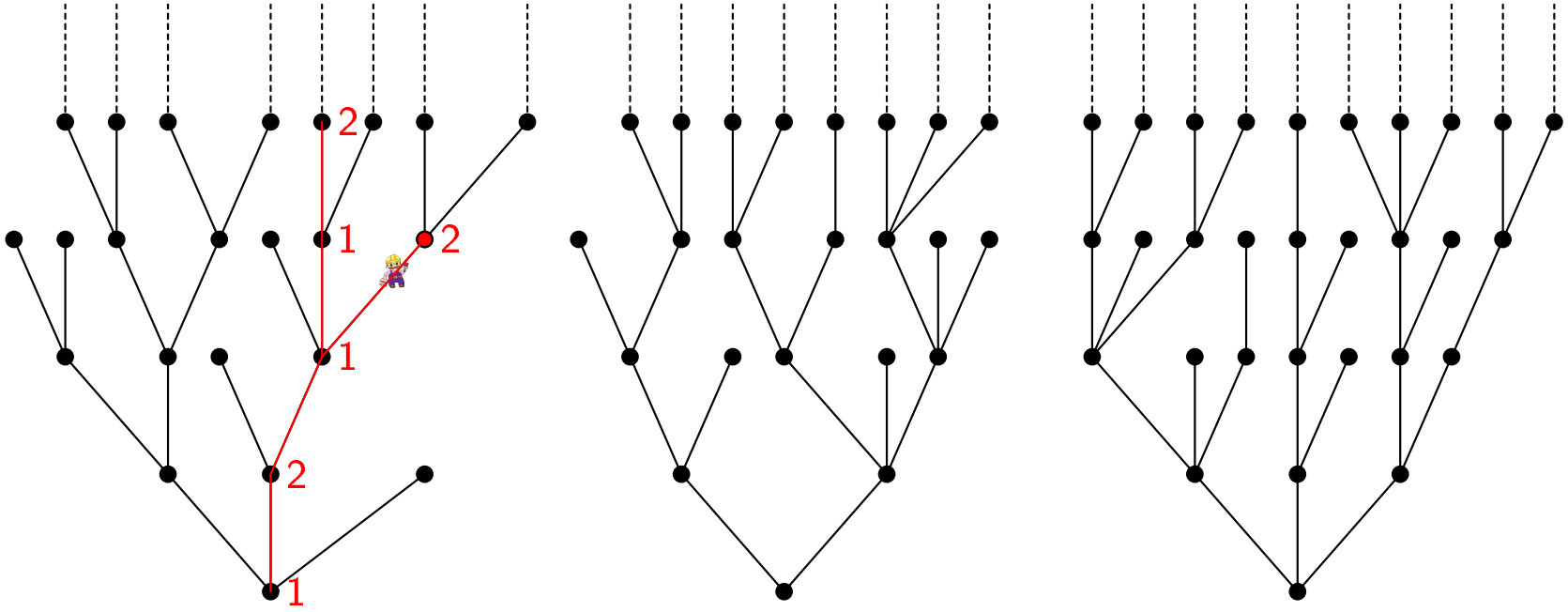
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



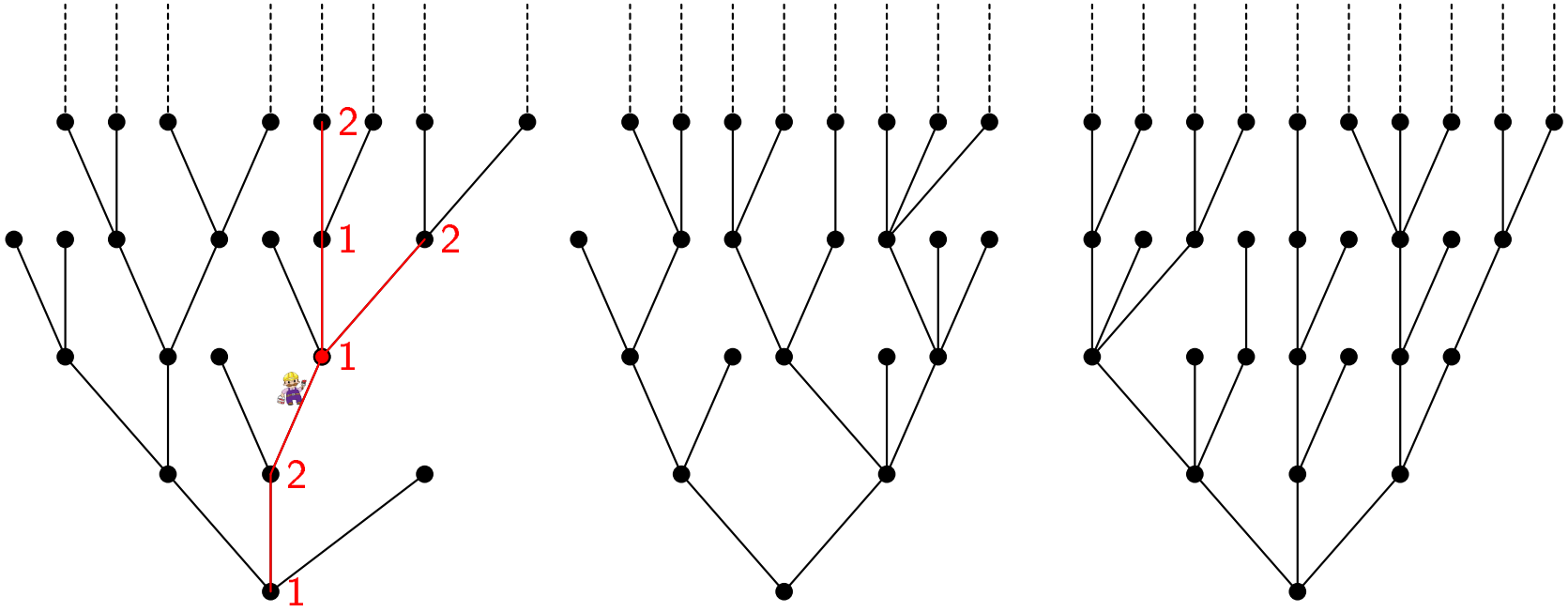
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



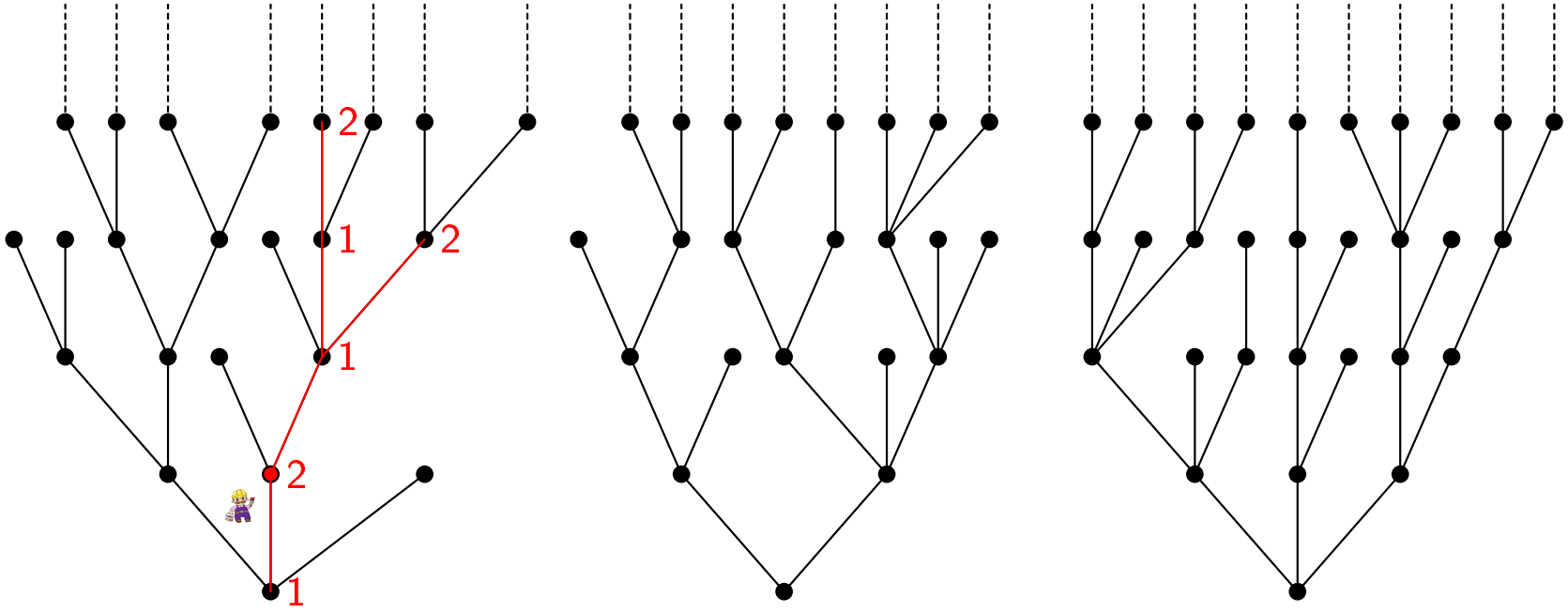
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



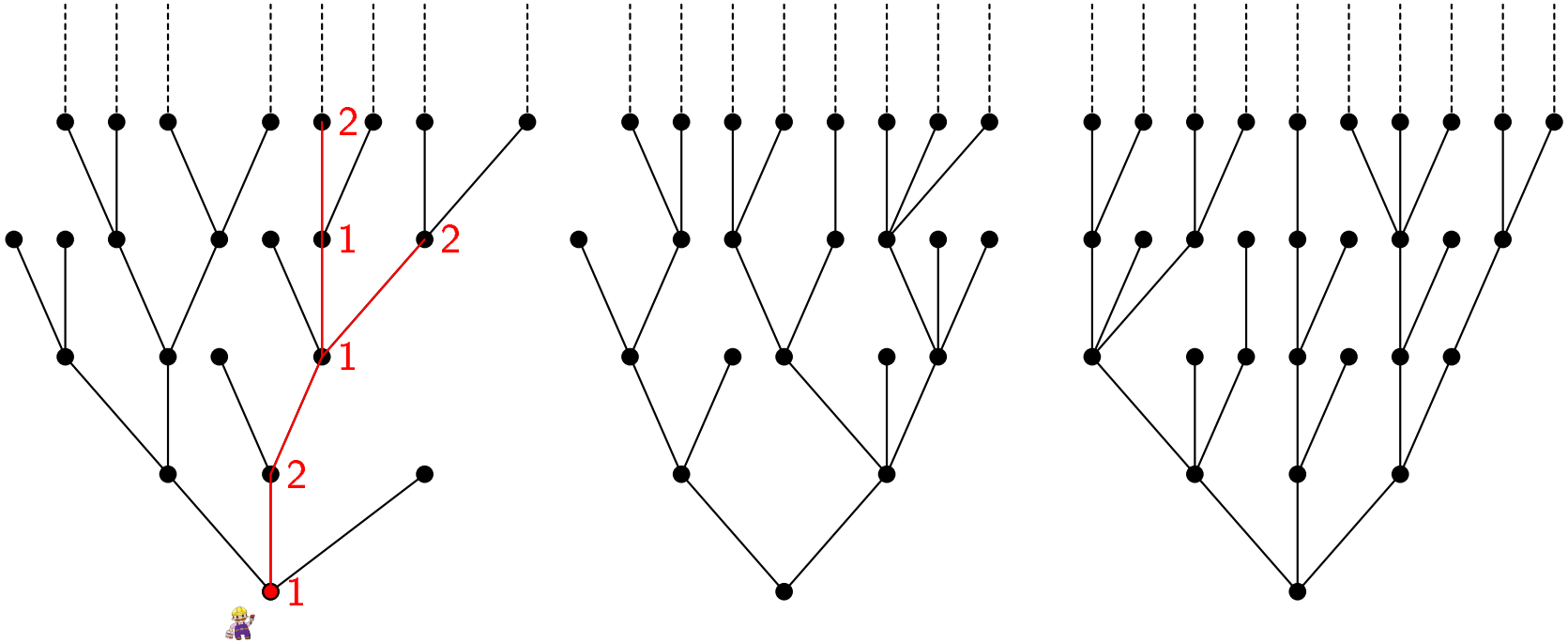
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



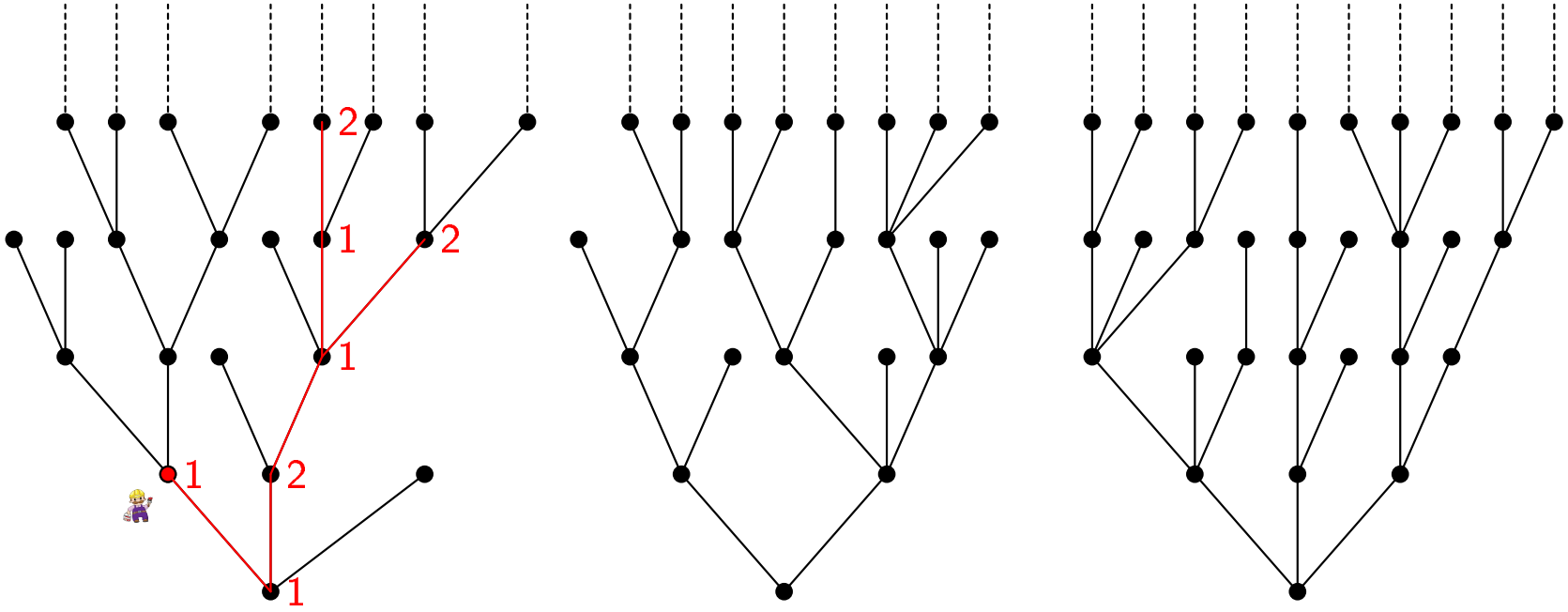
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



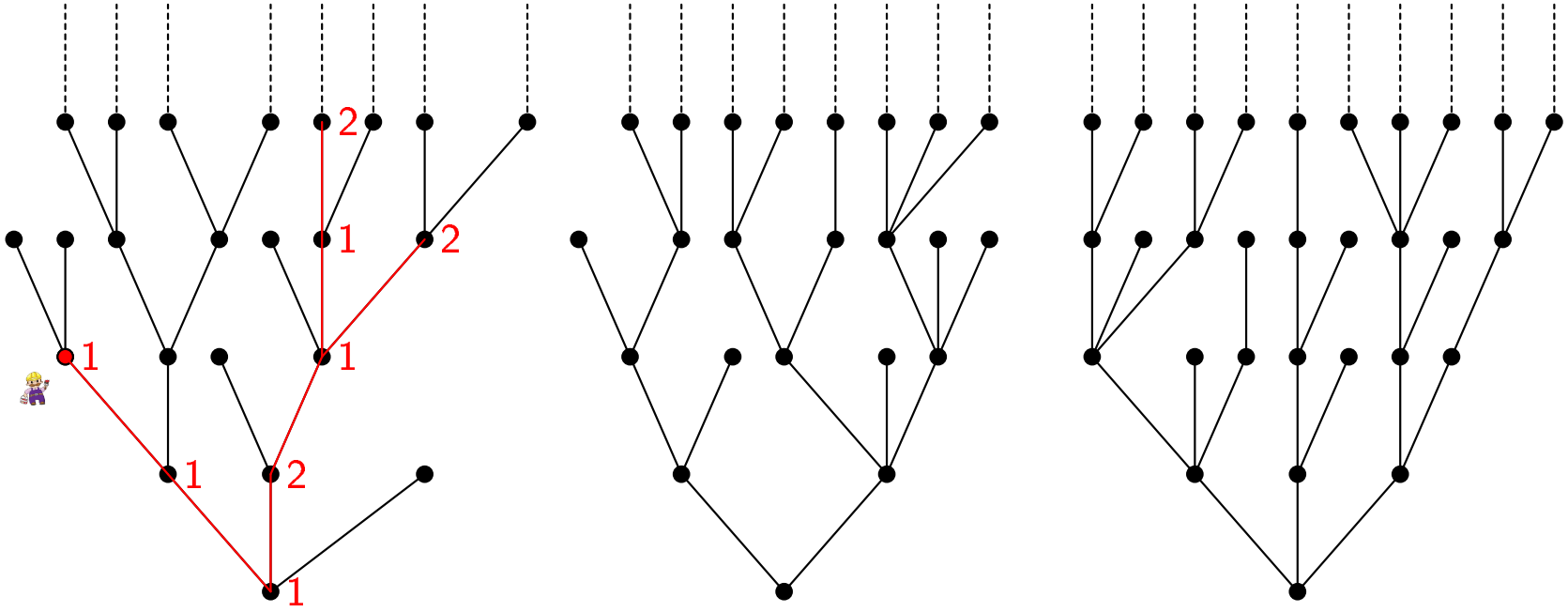
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



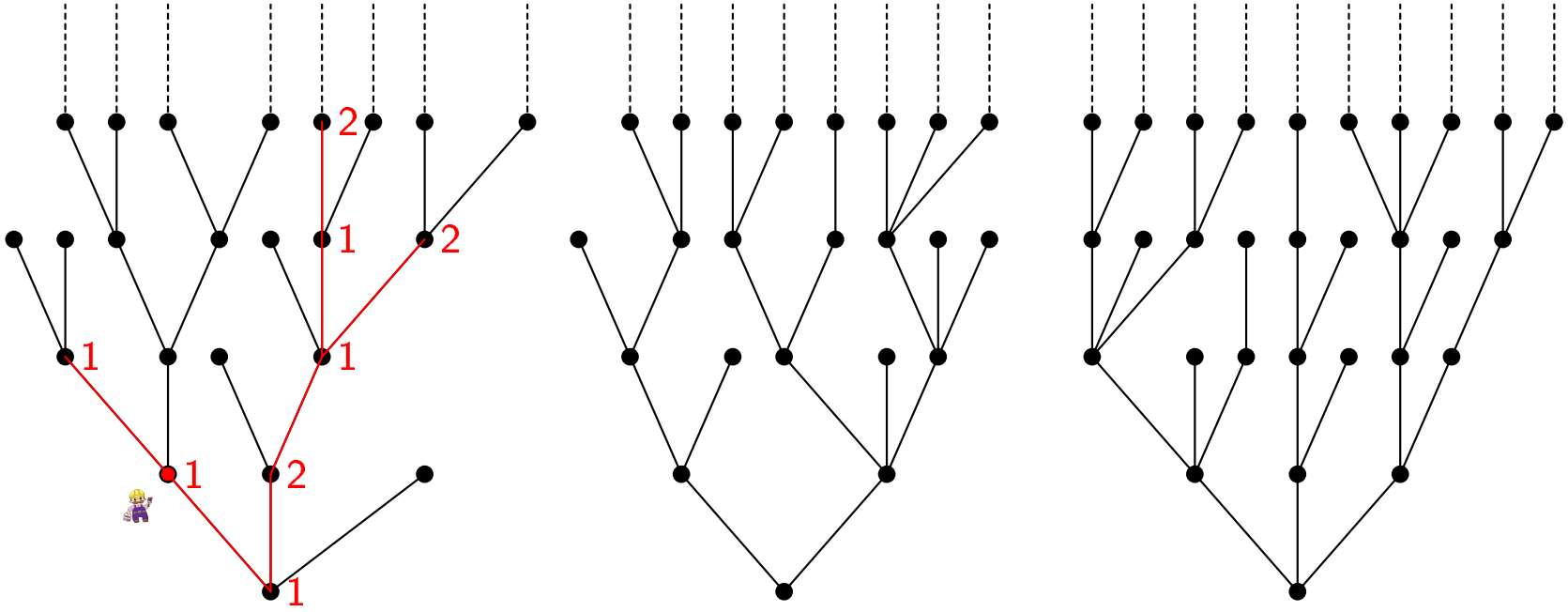
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



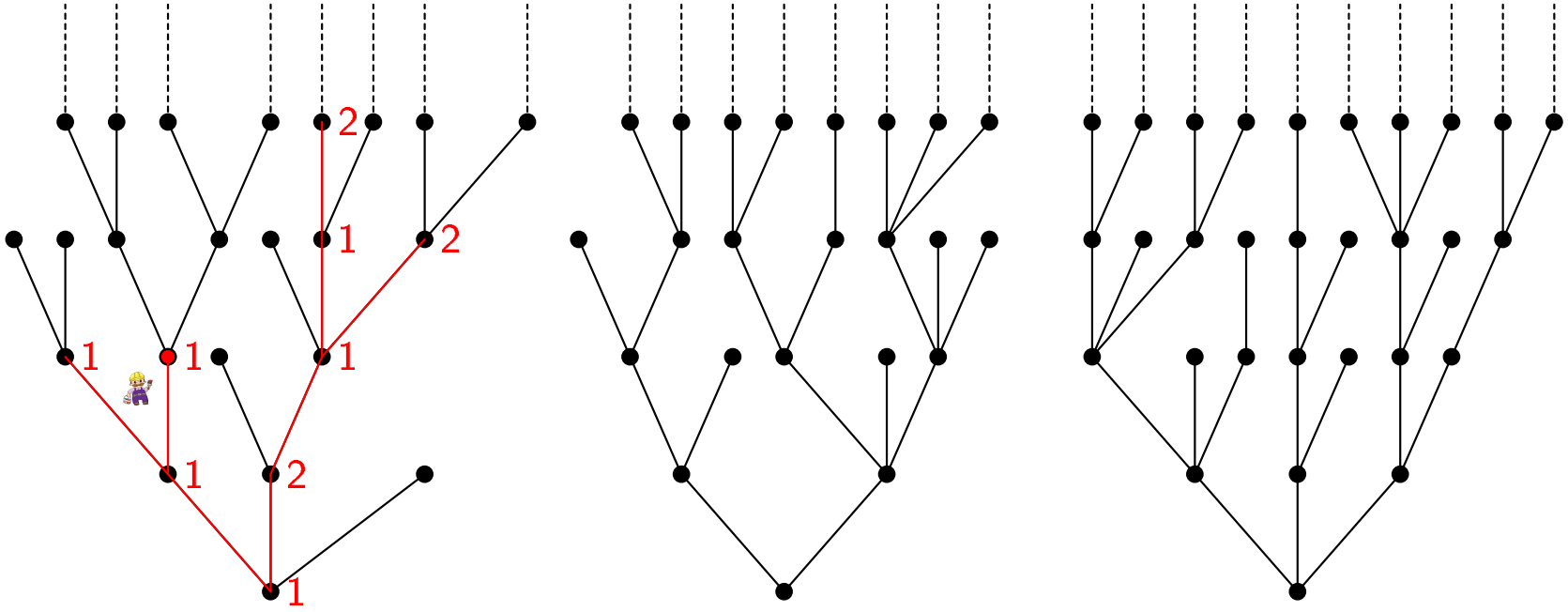
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



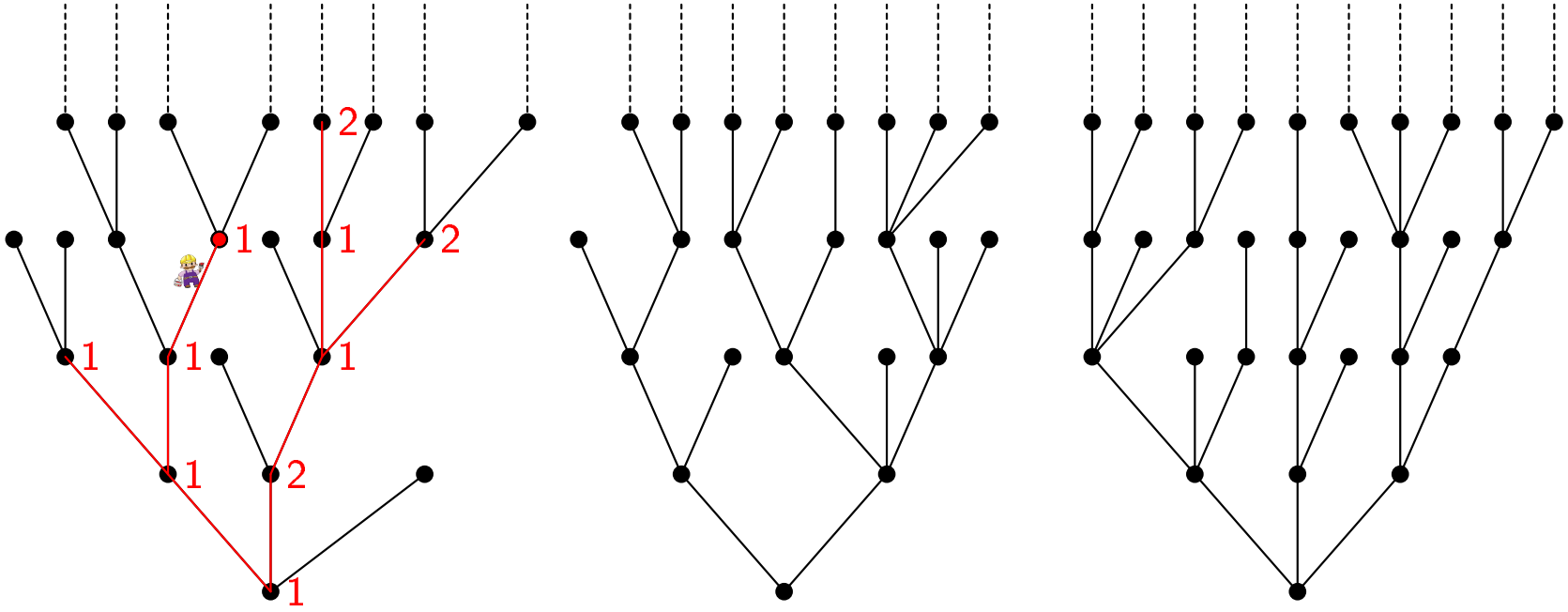
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



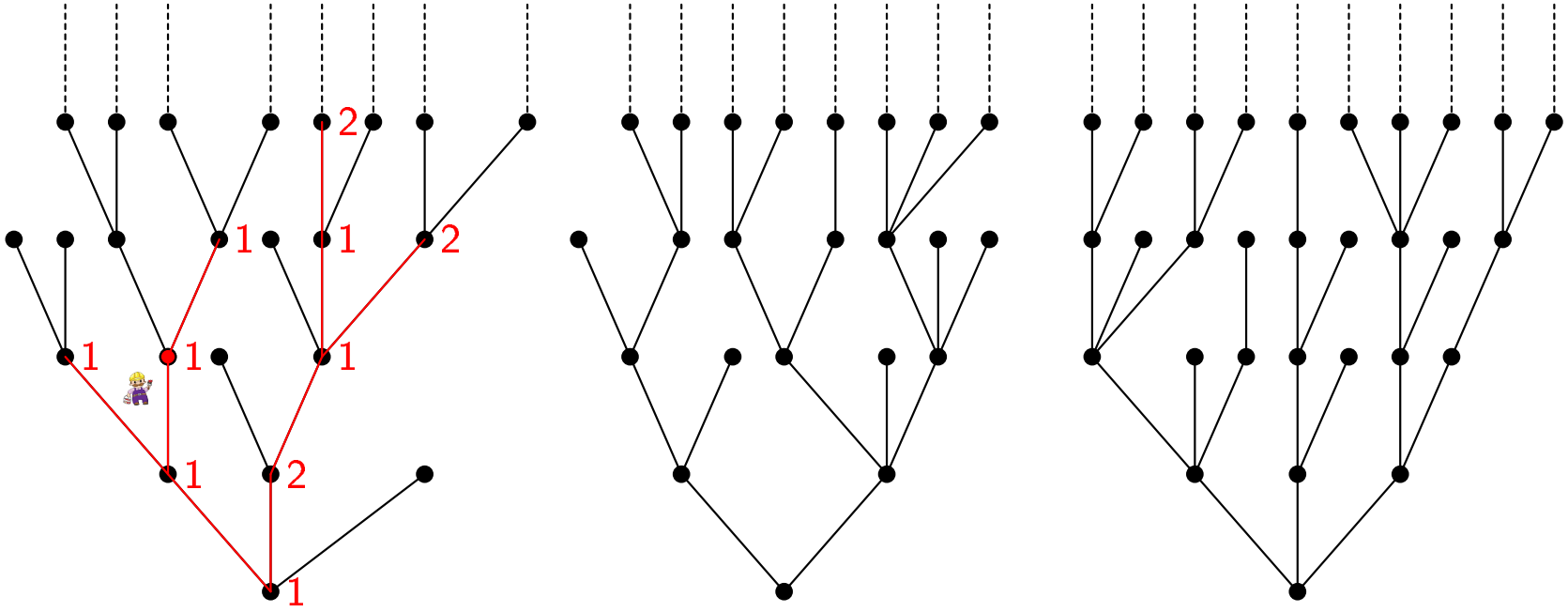
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



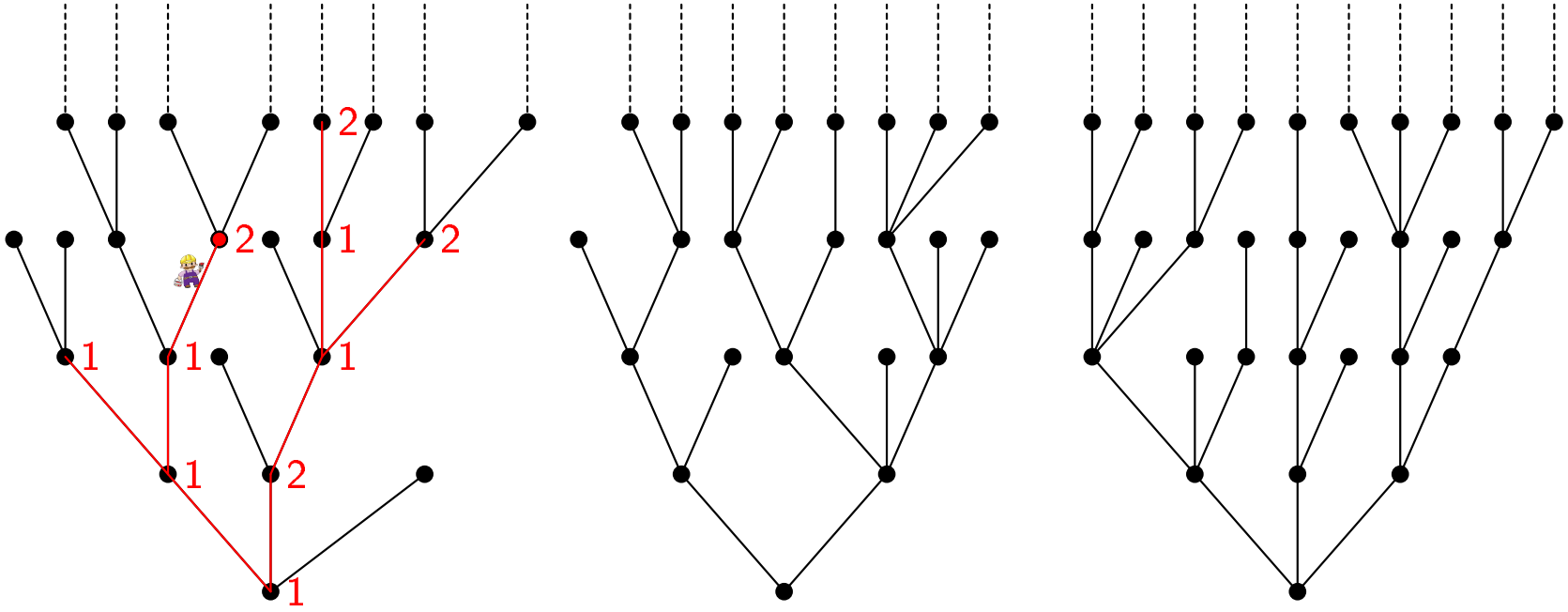
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



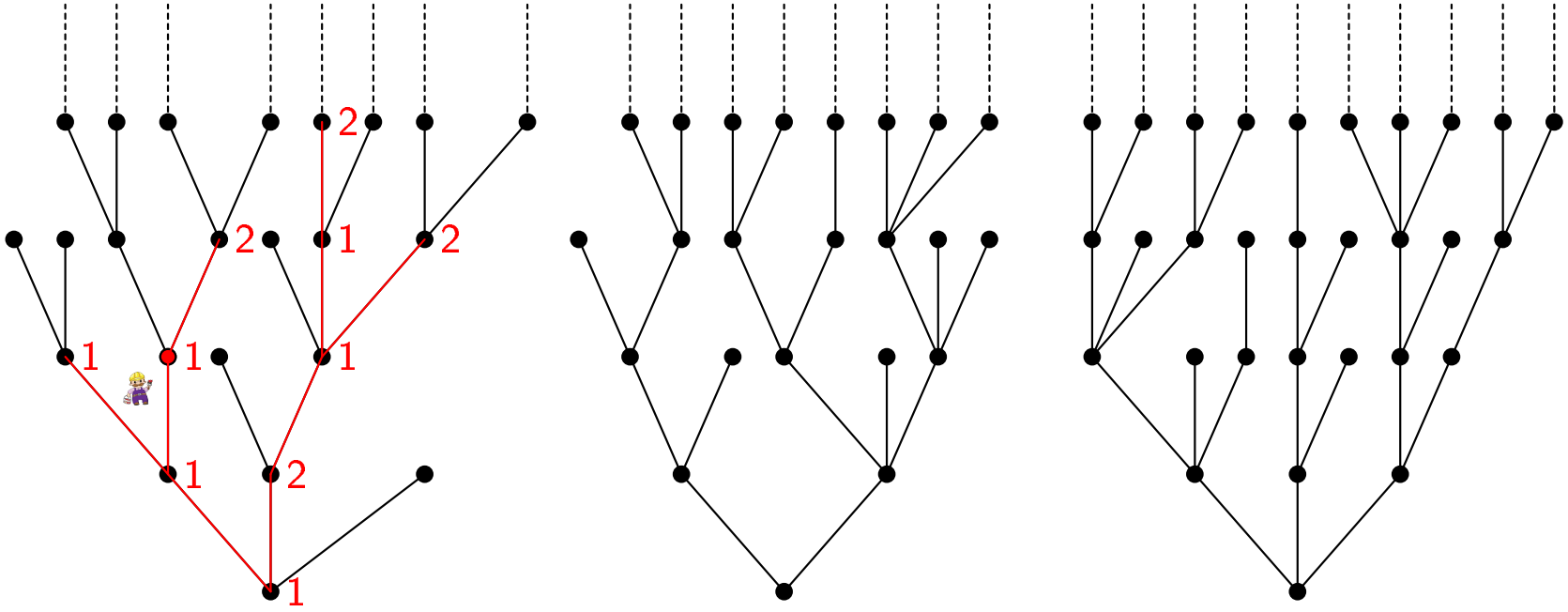
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



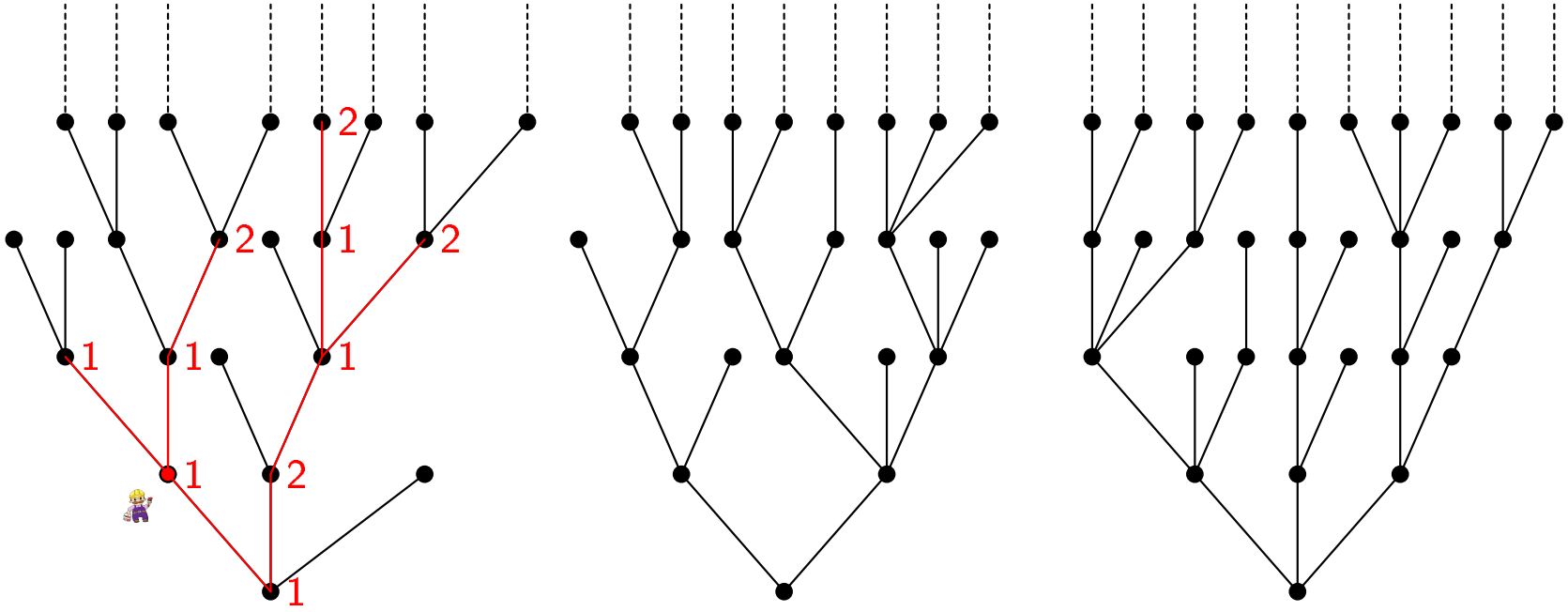
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



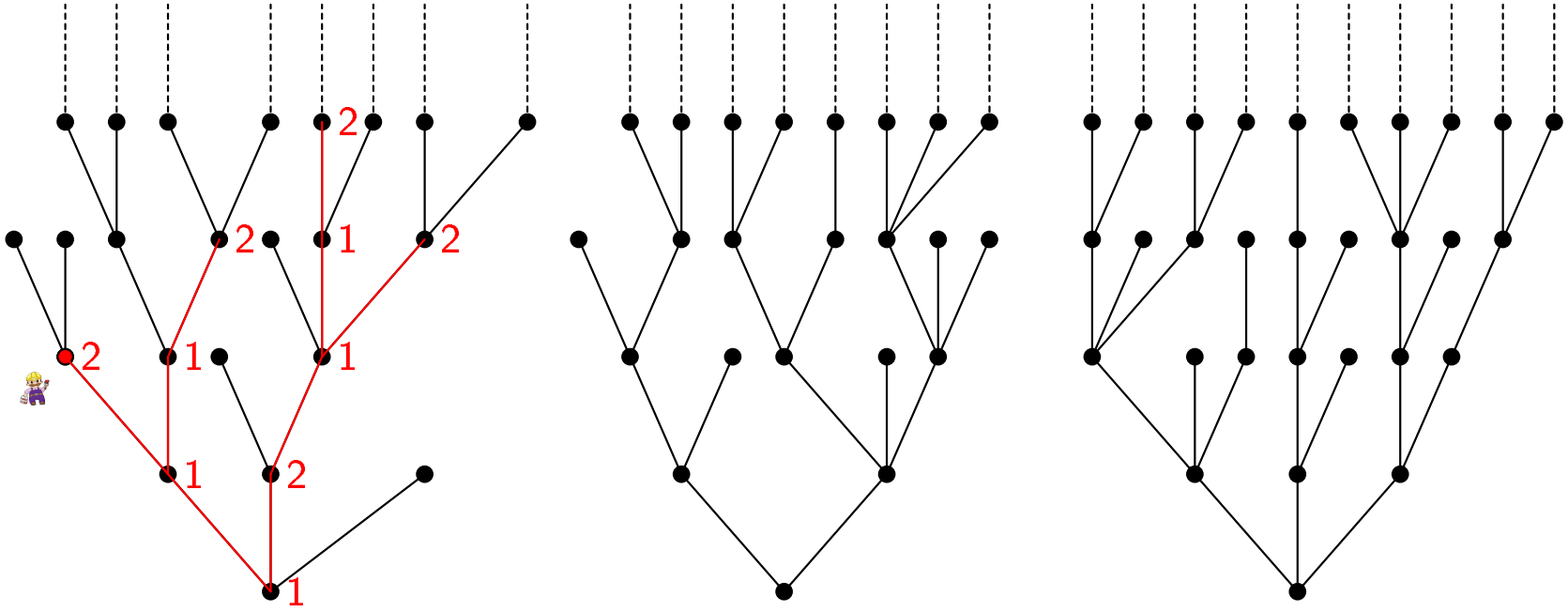
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



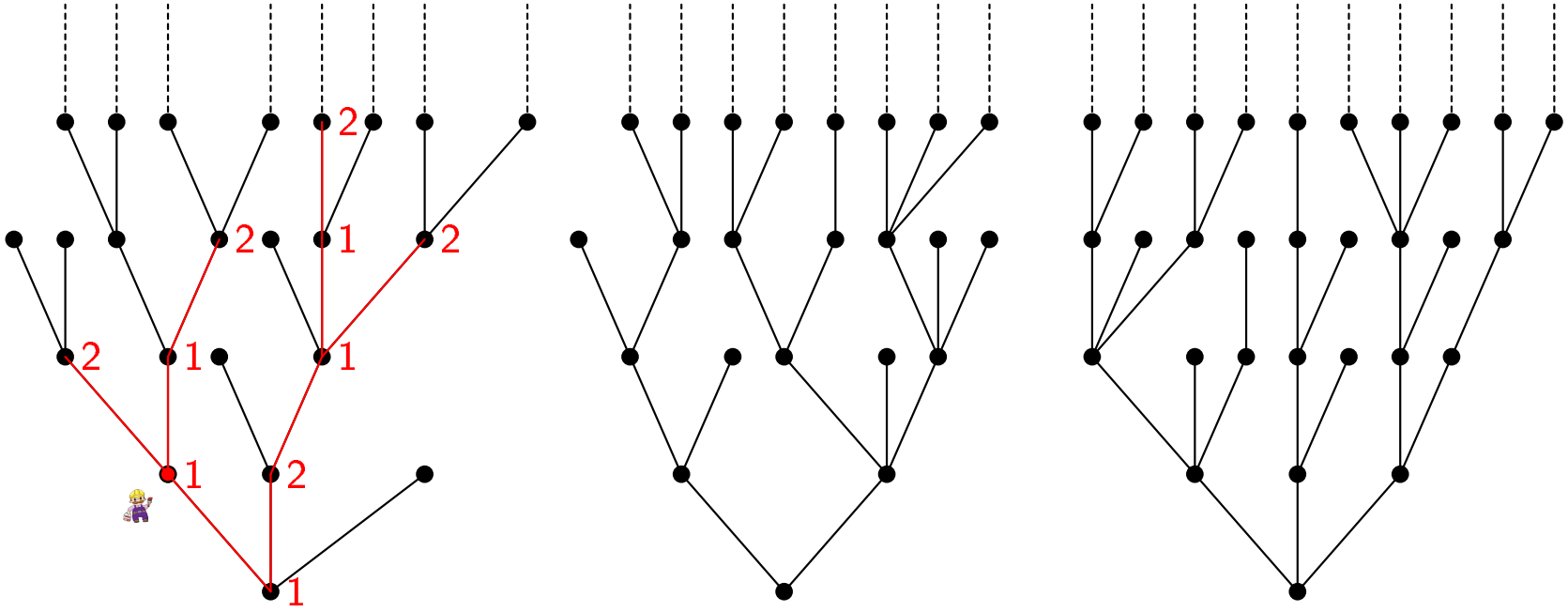
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



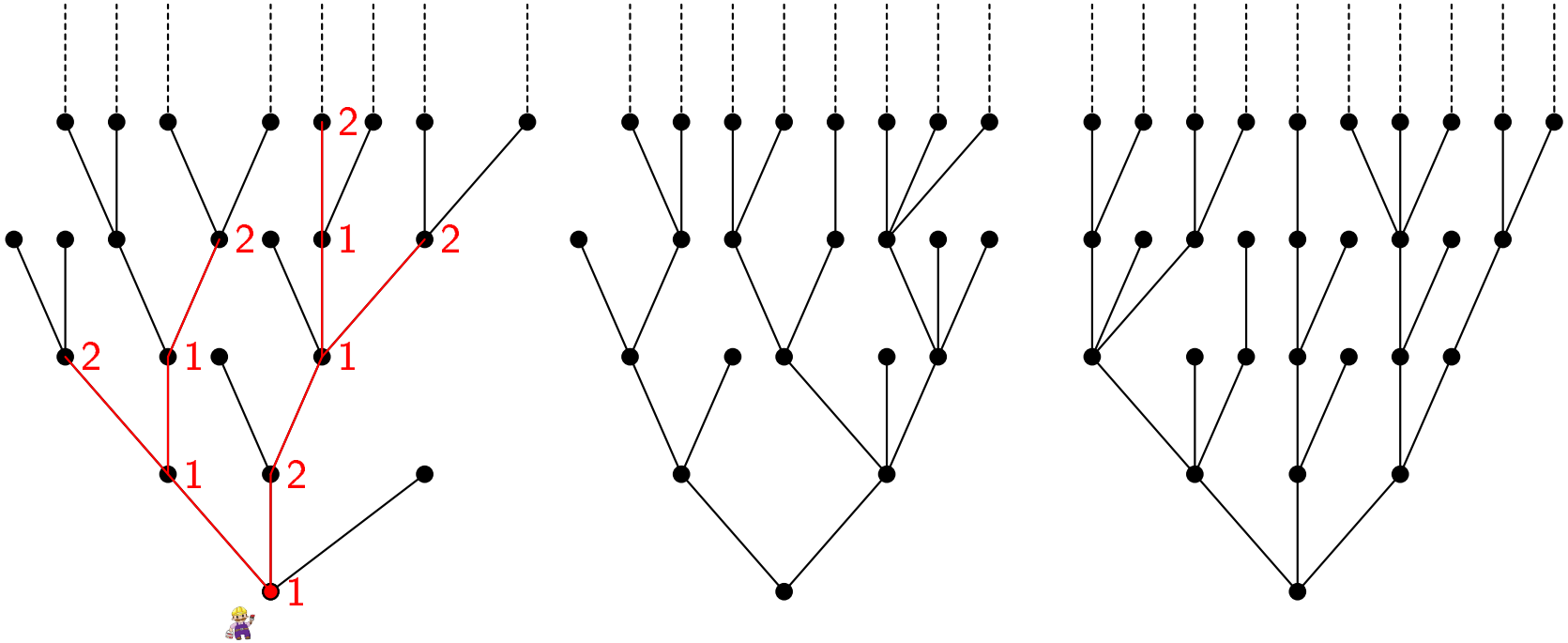
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



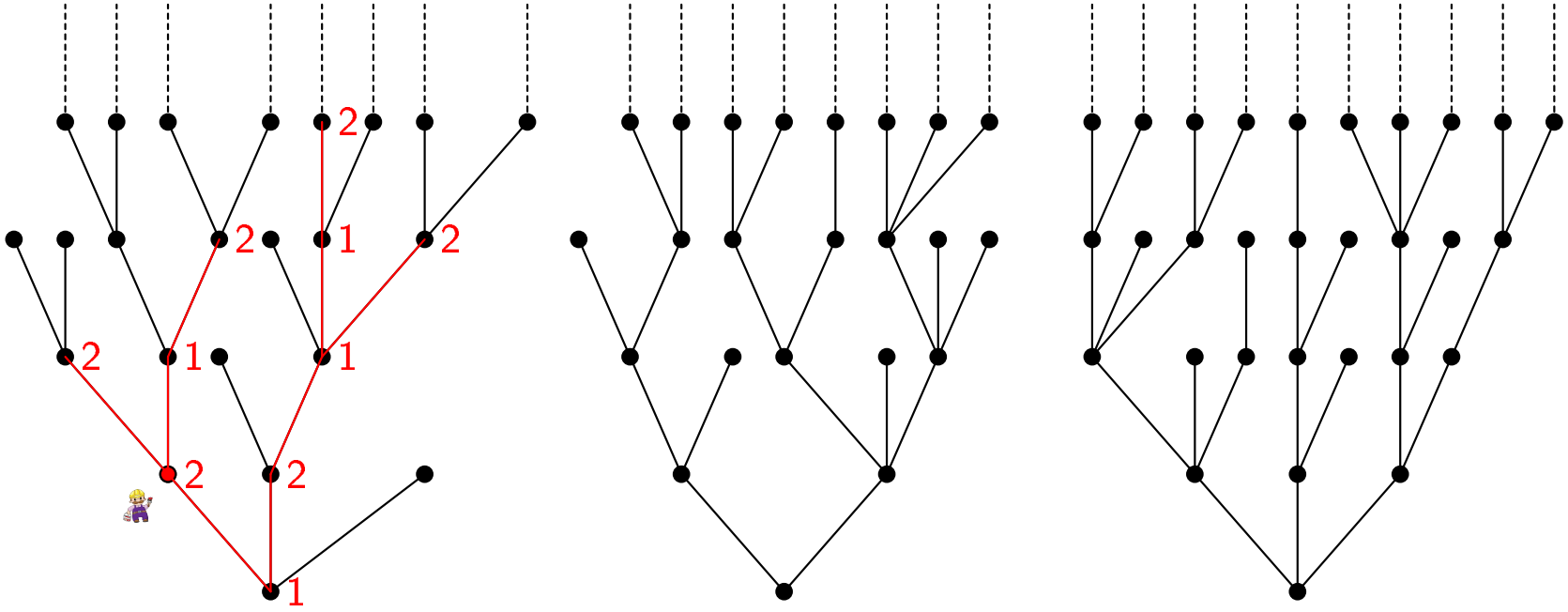
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



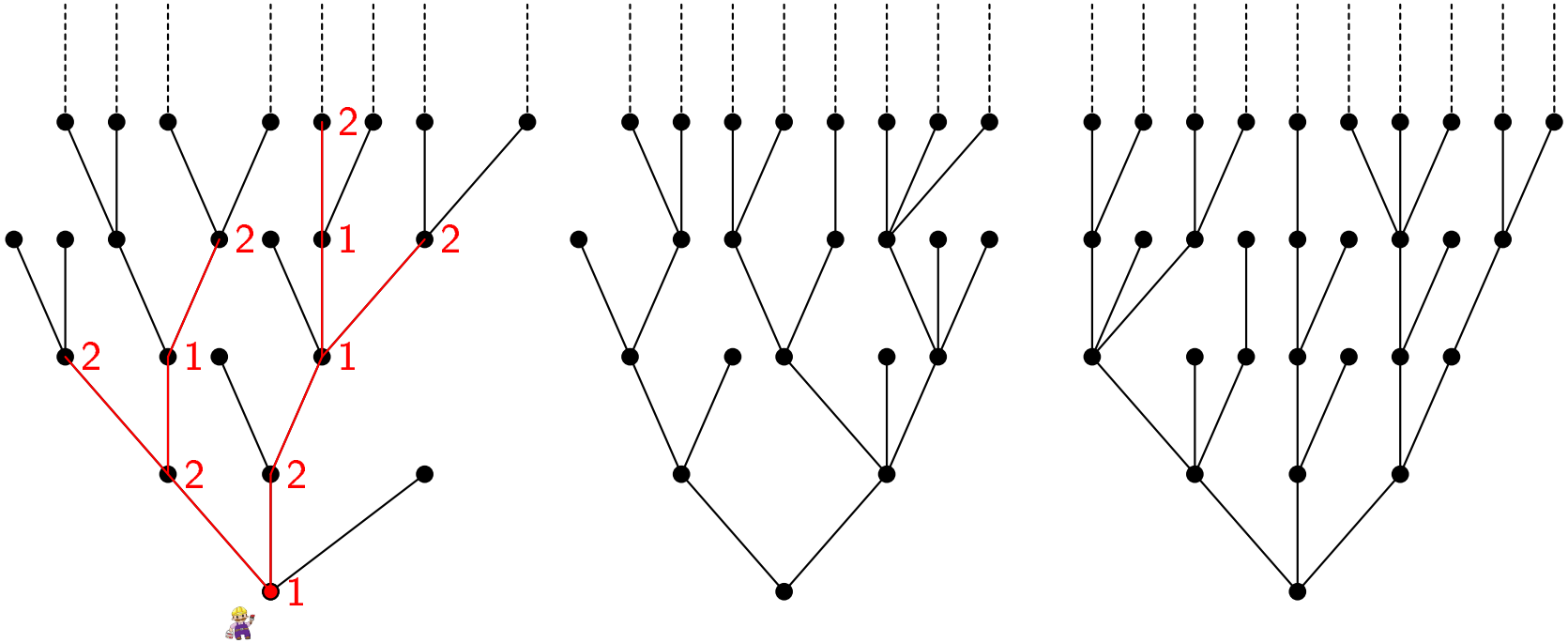
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



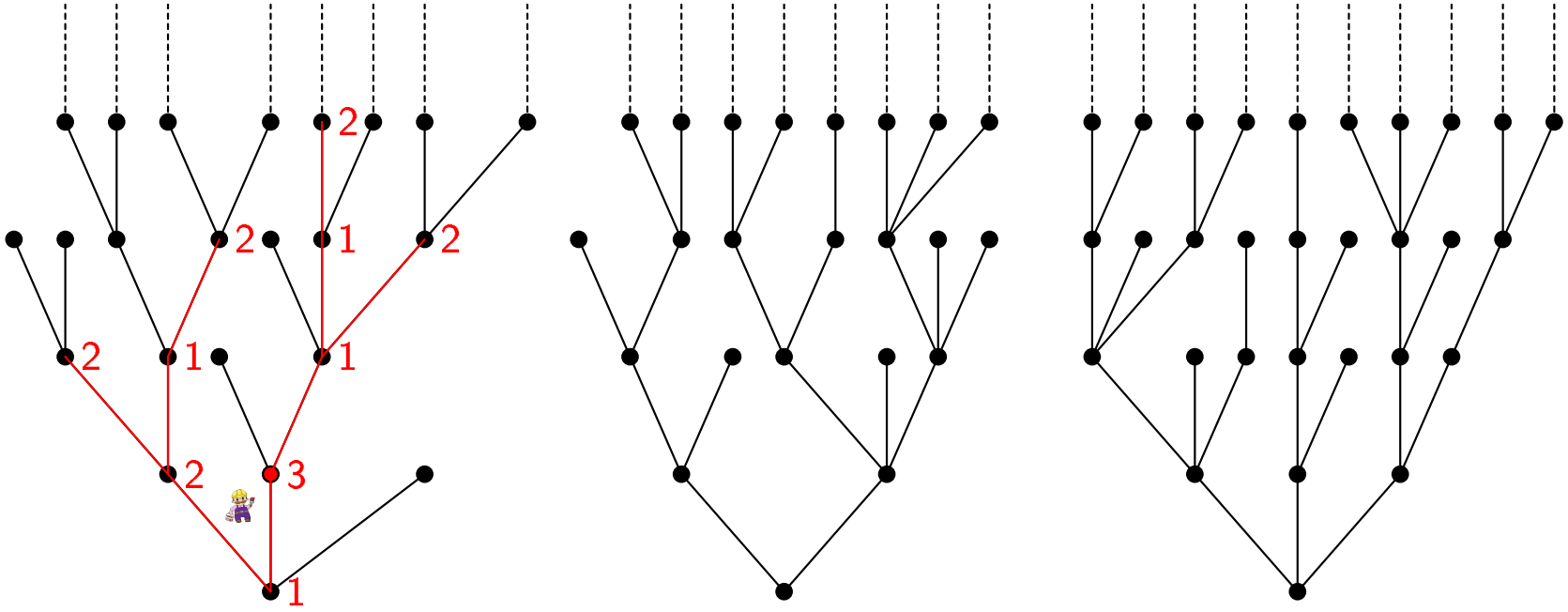
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



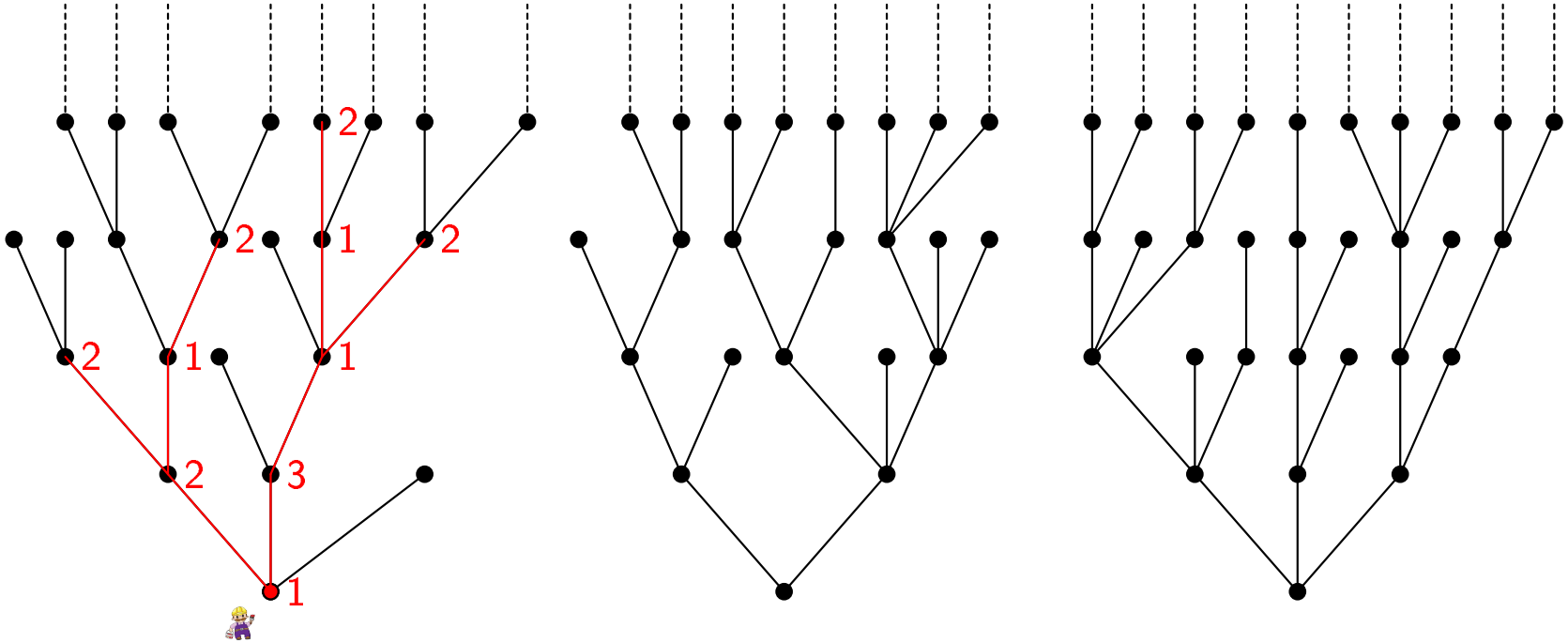
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



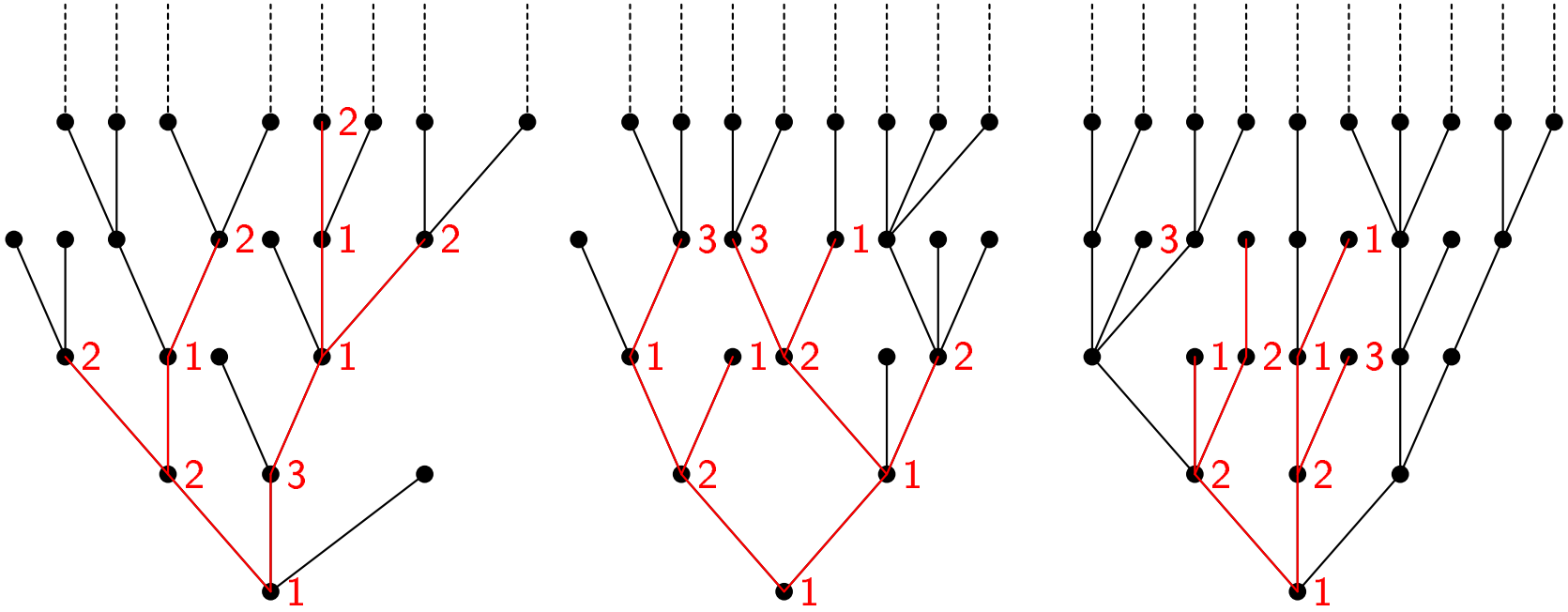
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



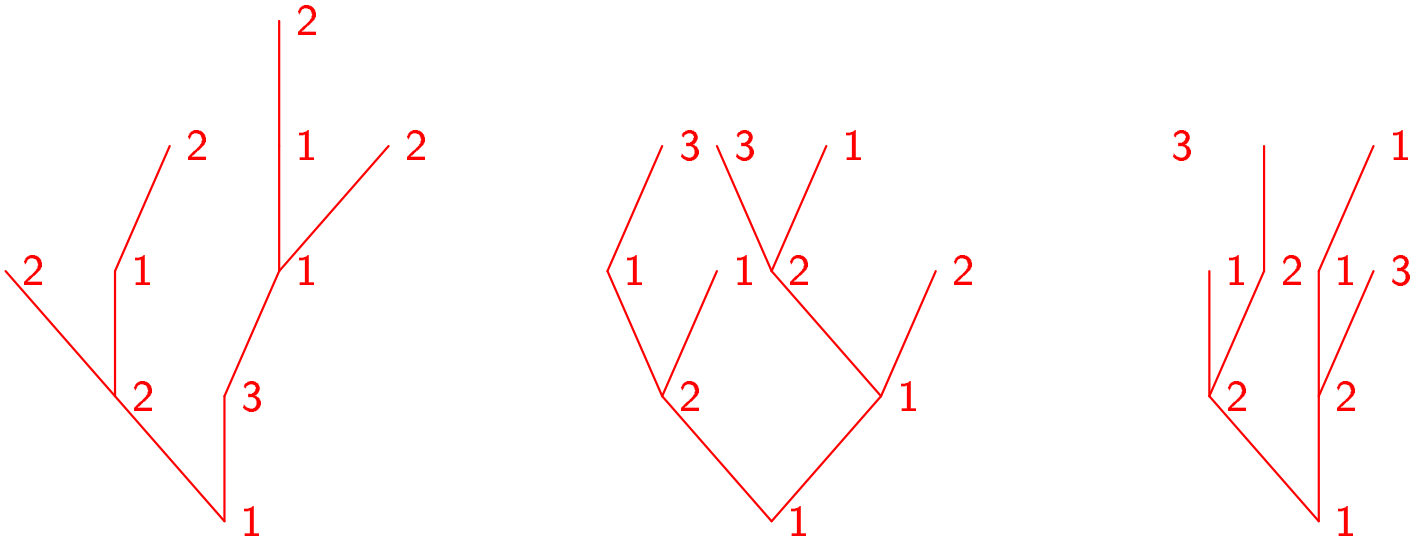
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace



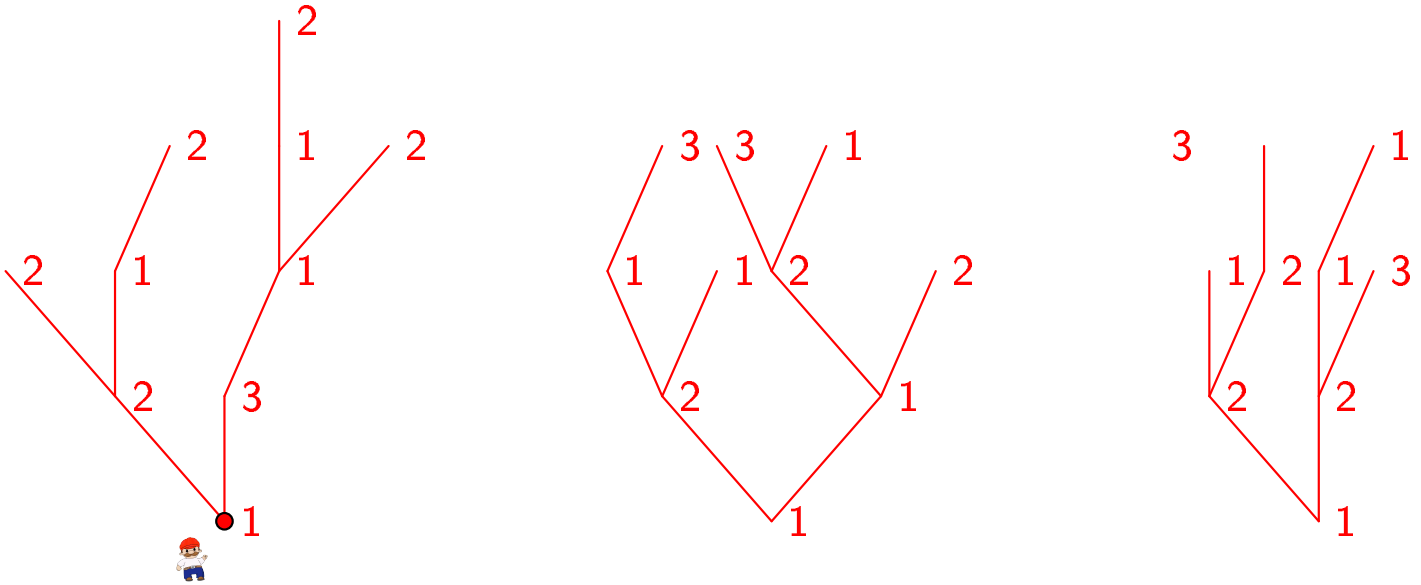
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace,



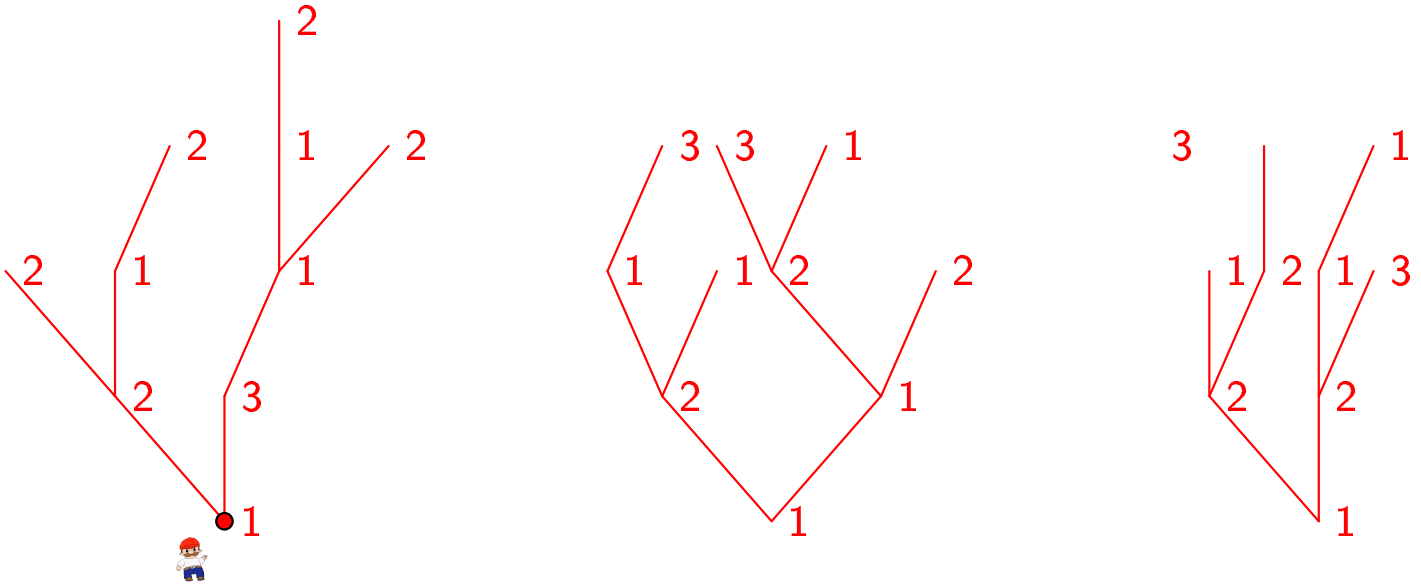
# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

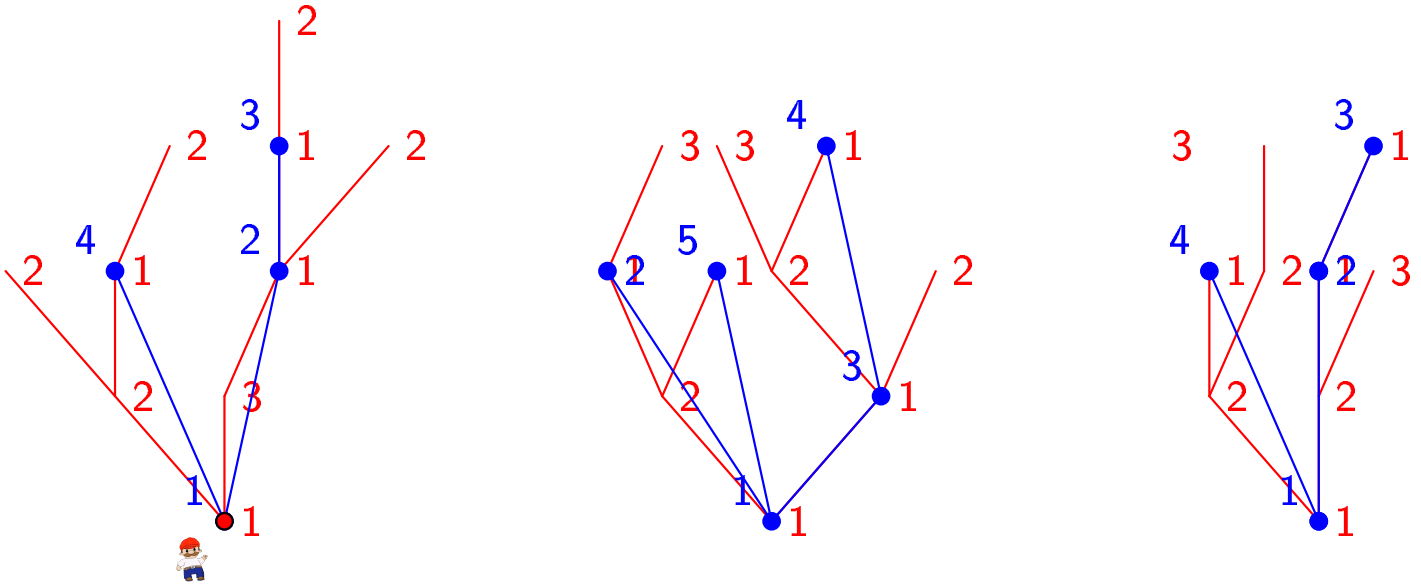
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire




3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

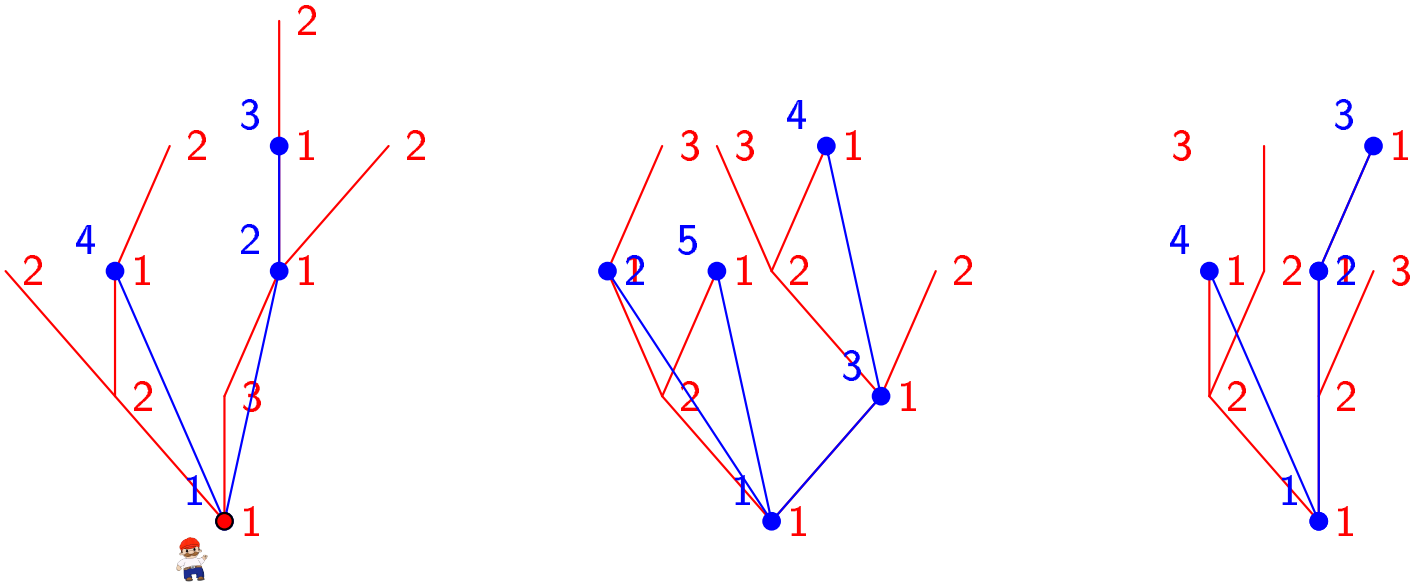
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

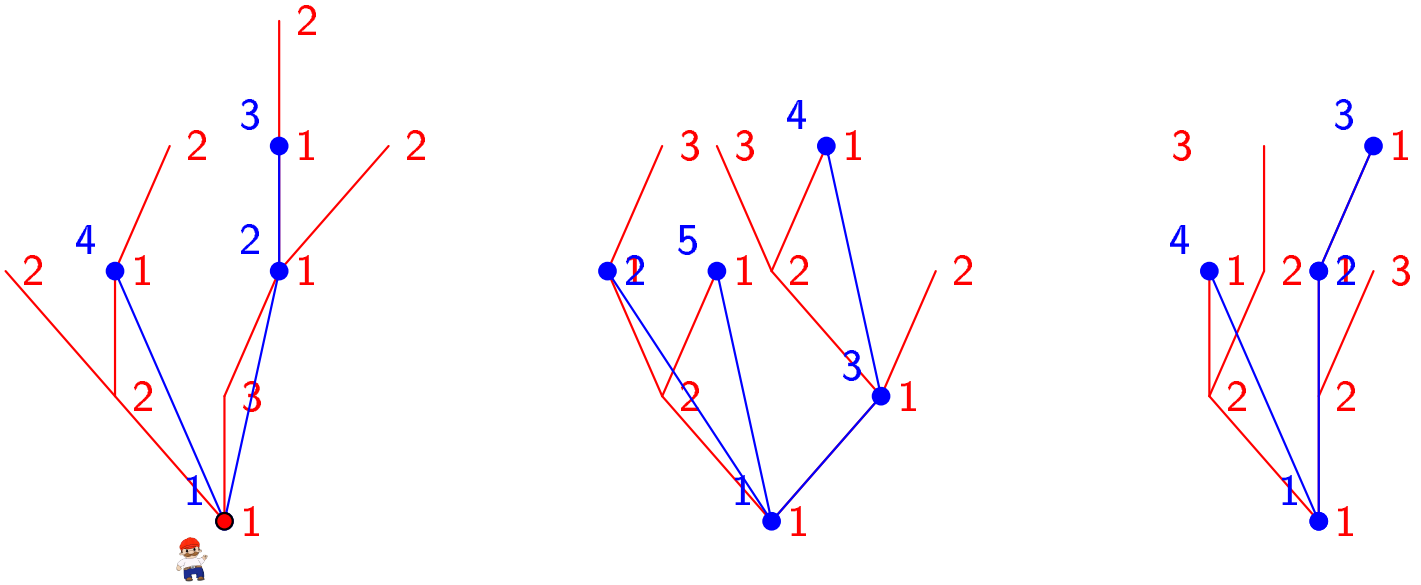
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

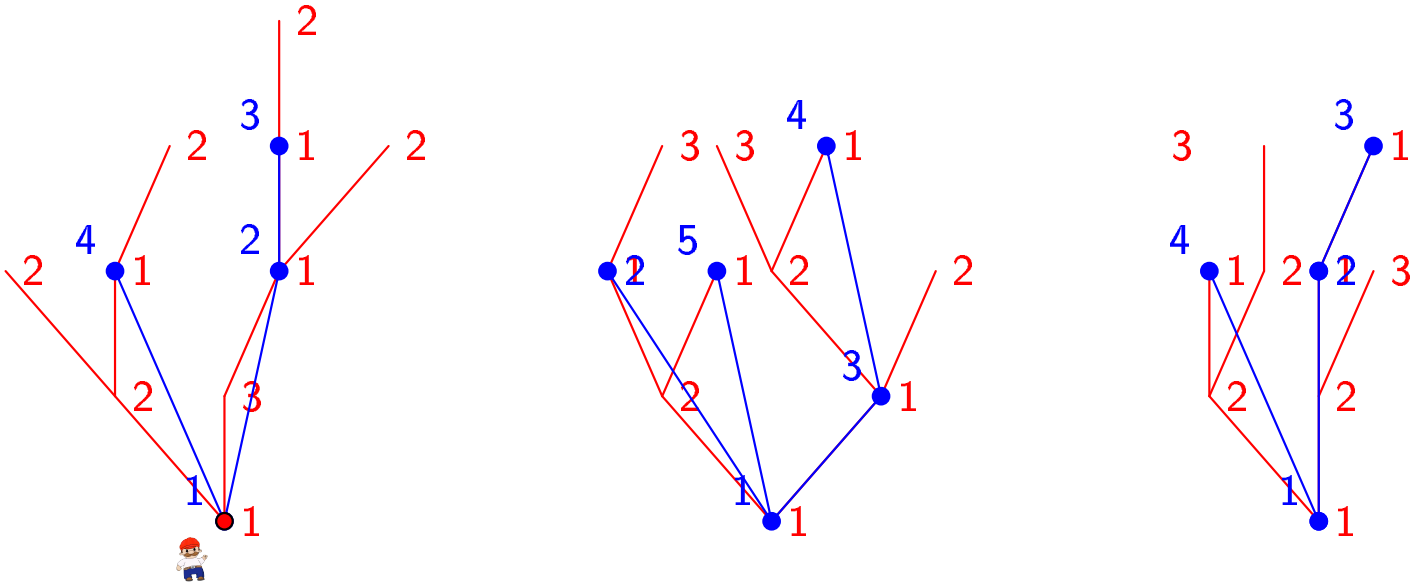
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

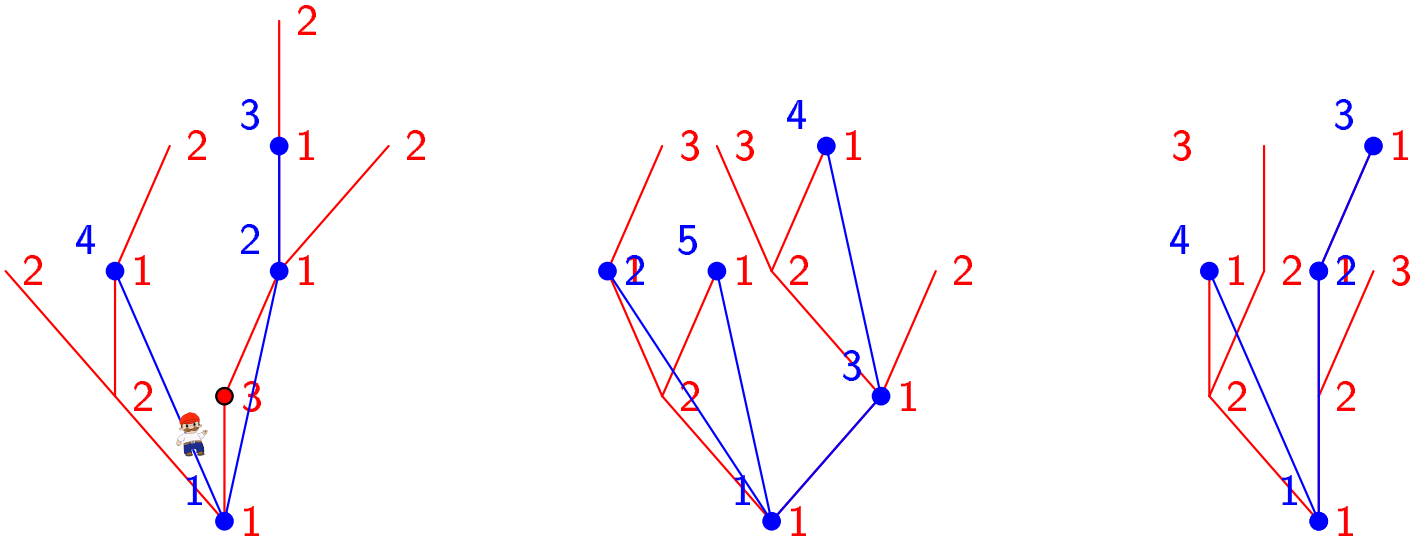
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

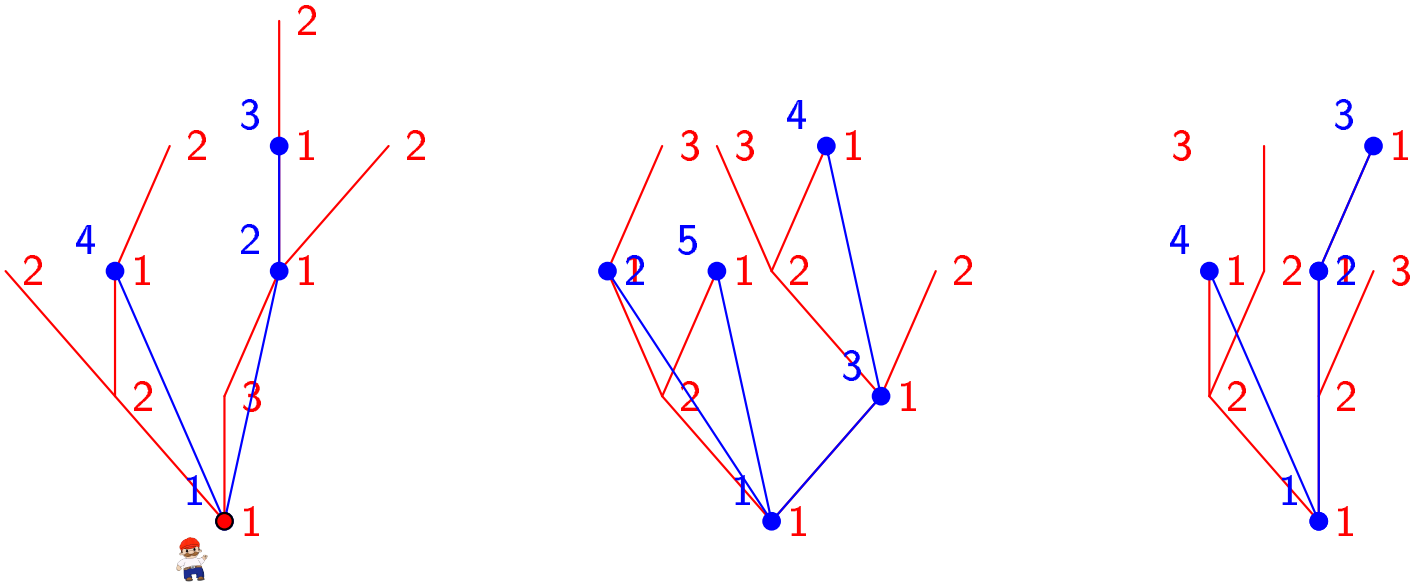
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

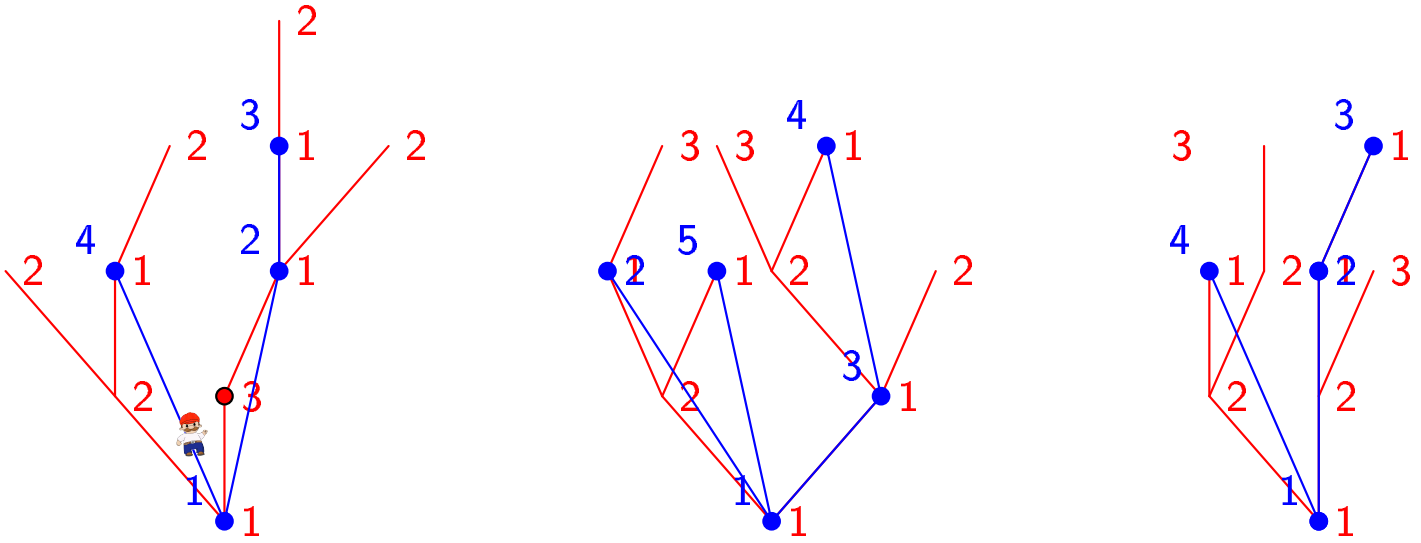
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

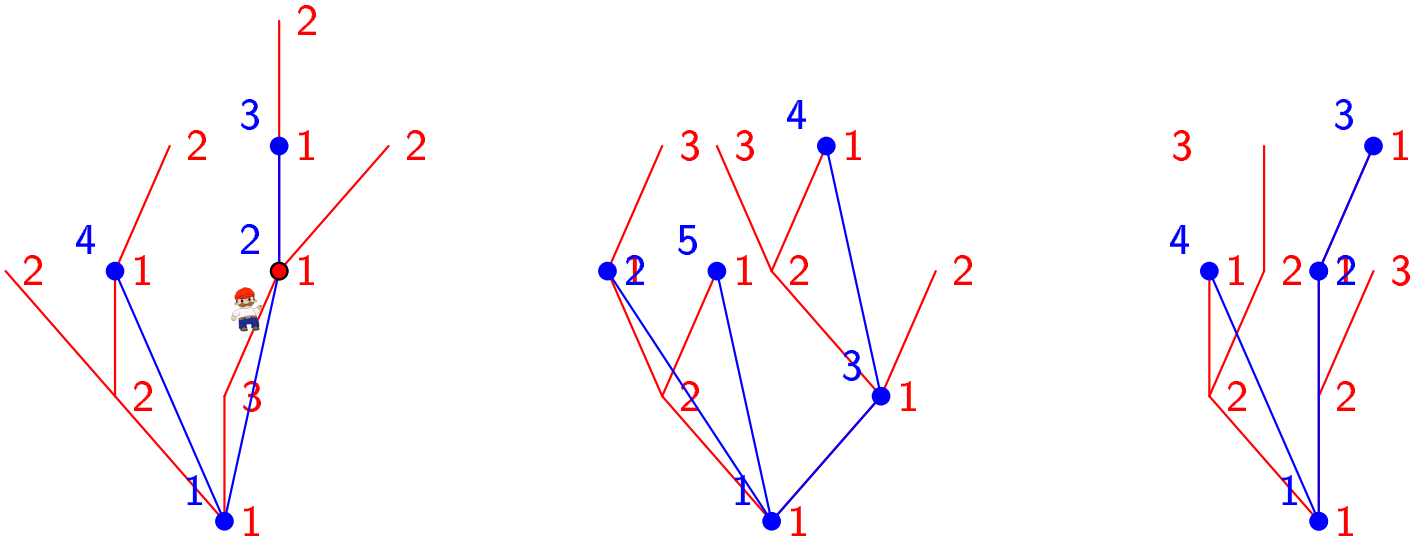
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

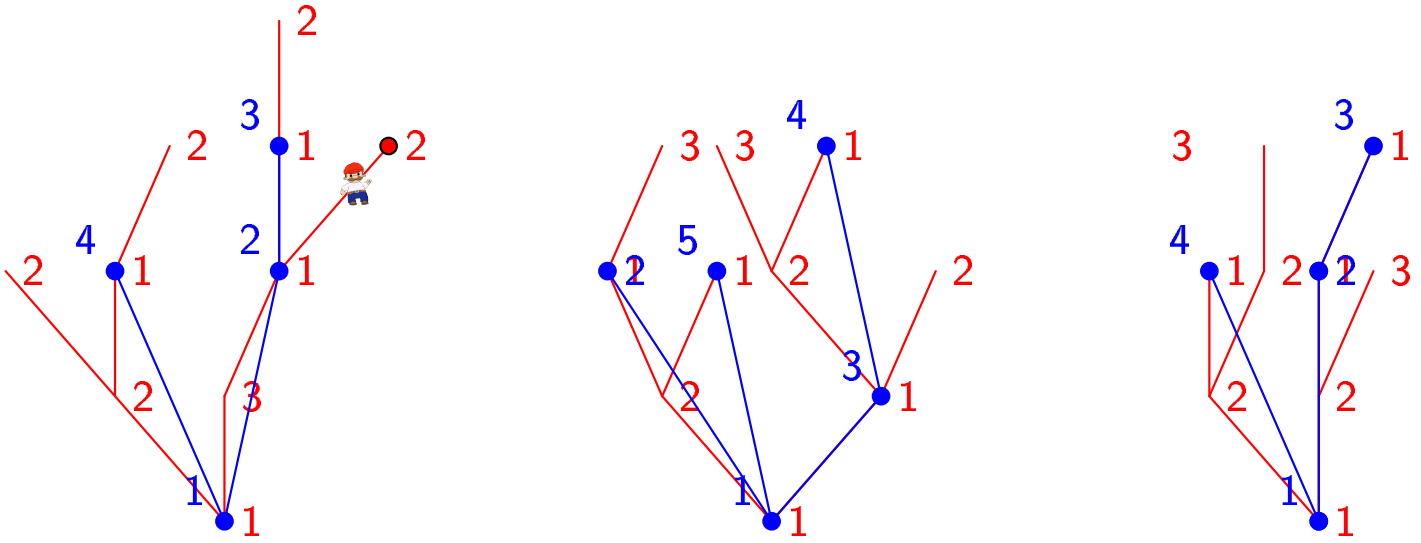
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

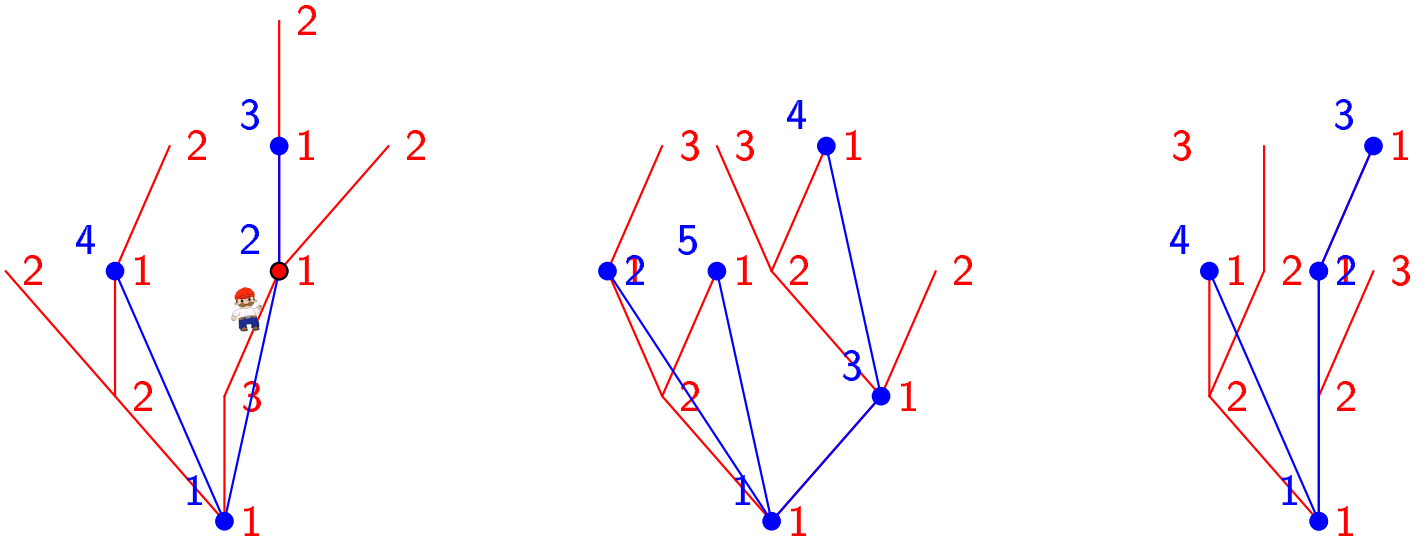
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

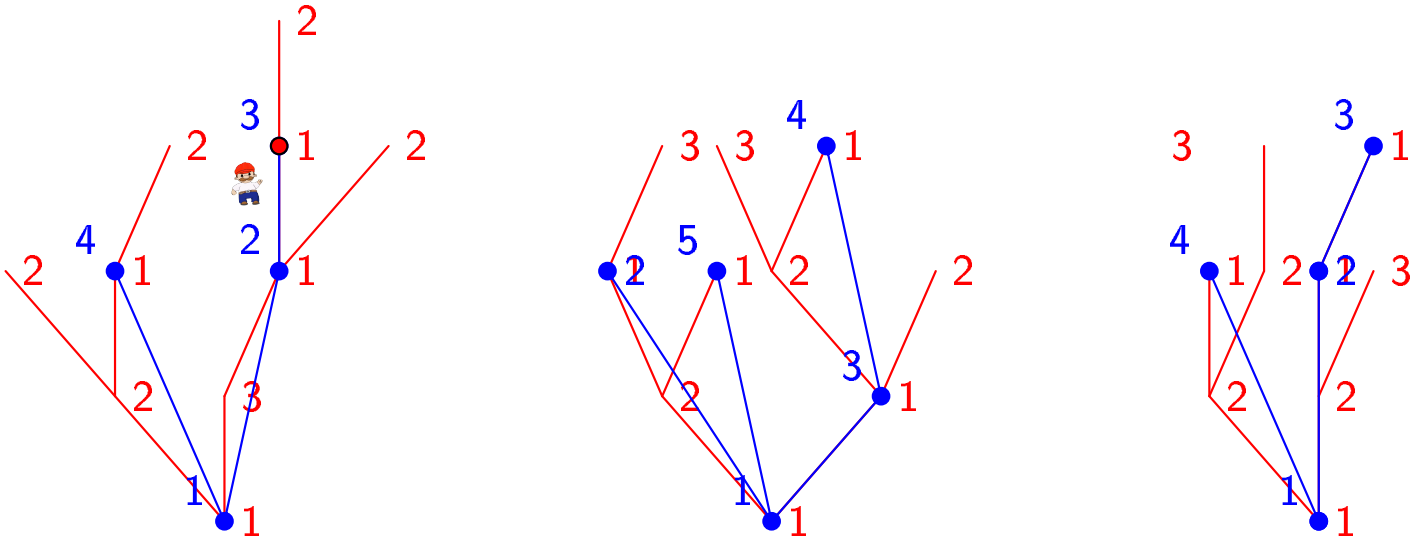
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

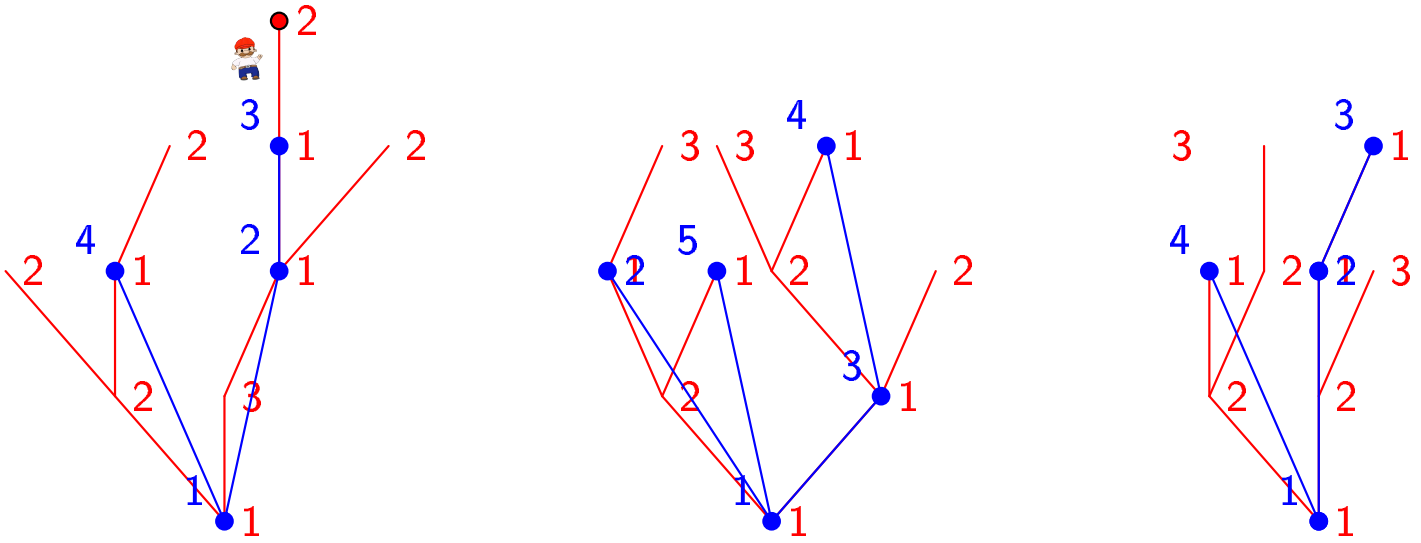
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

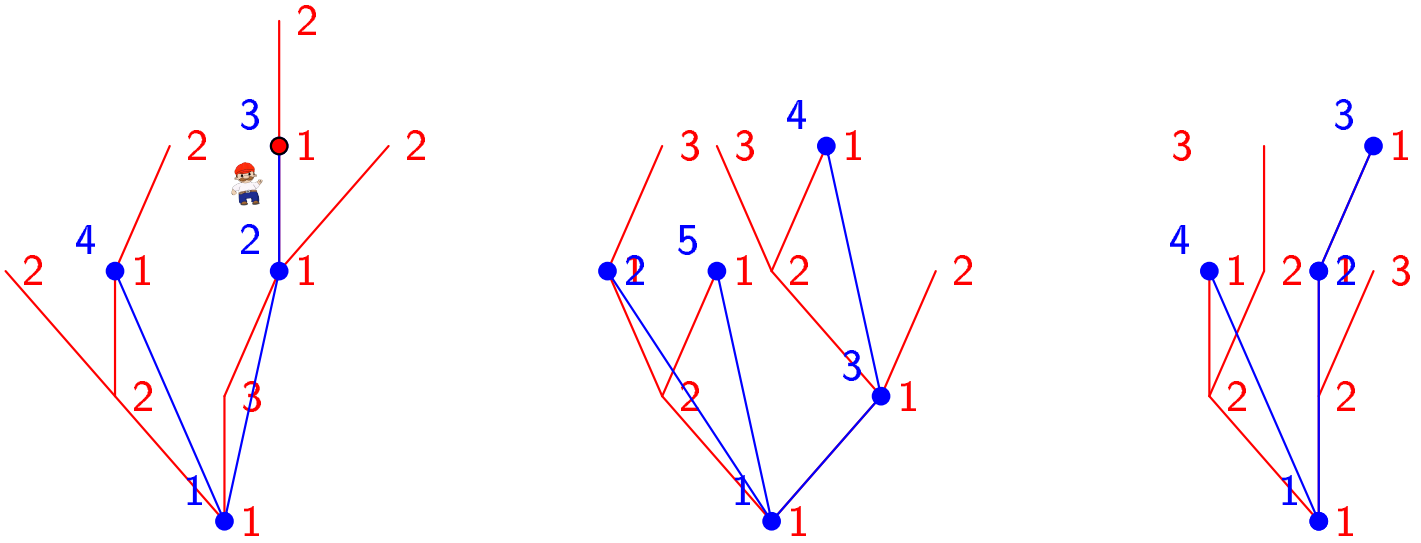
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

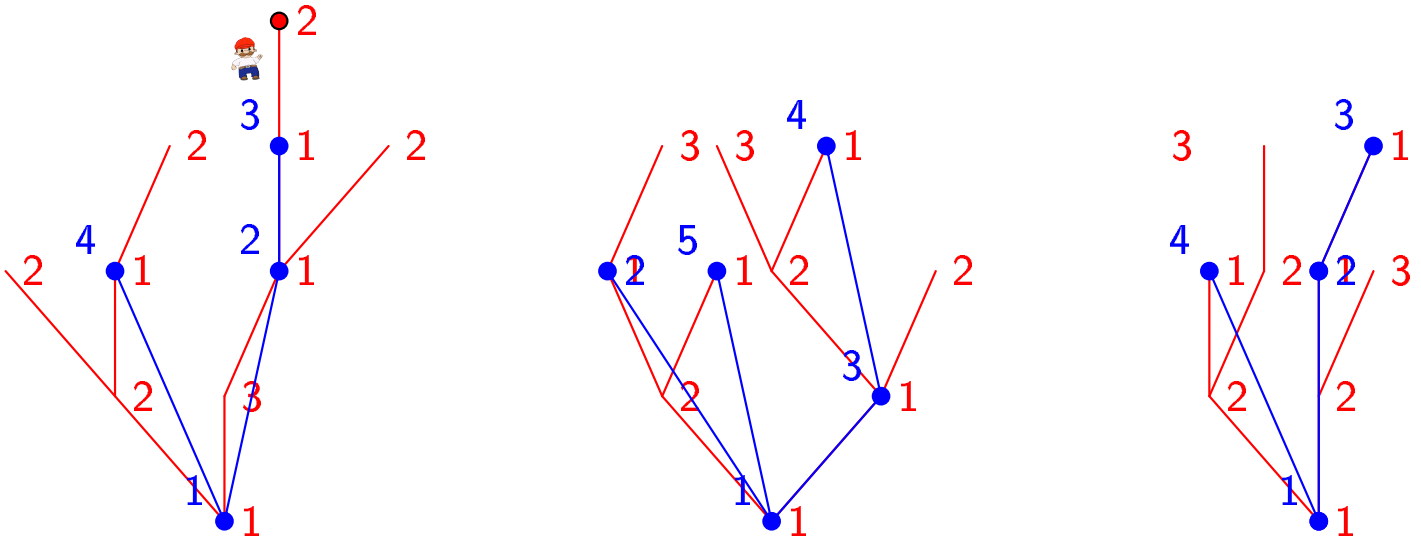
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

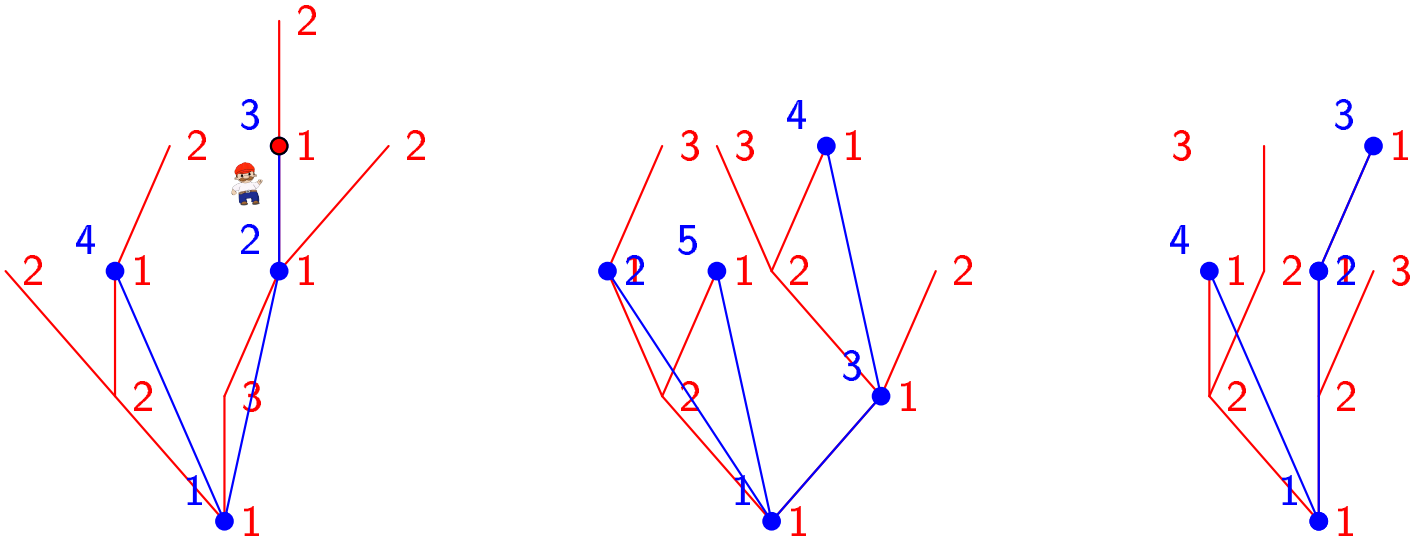
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

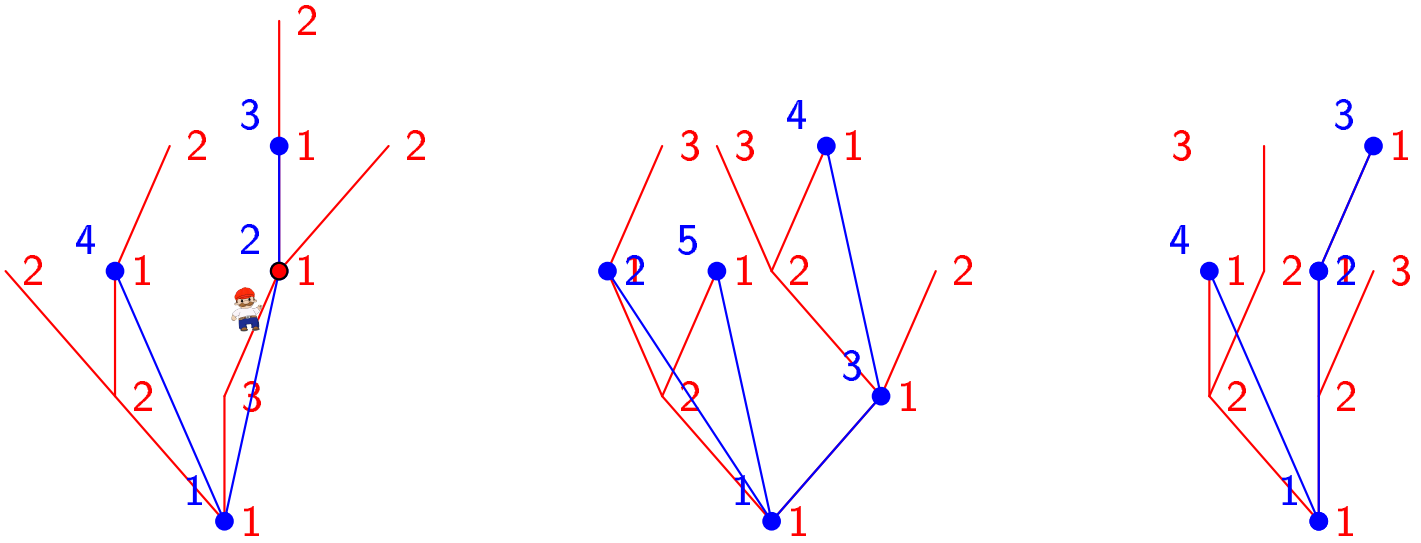
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

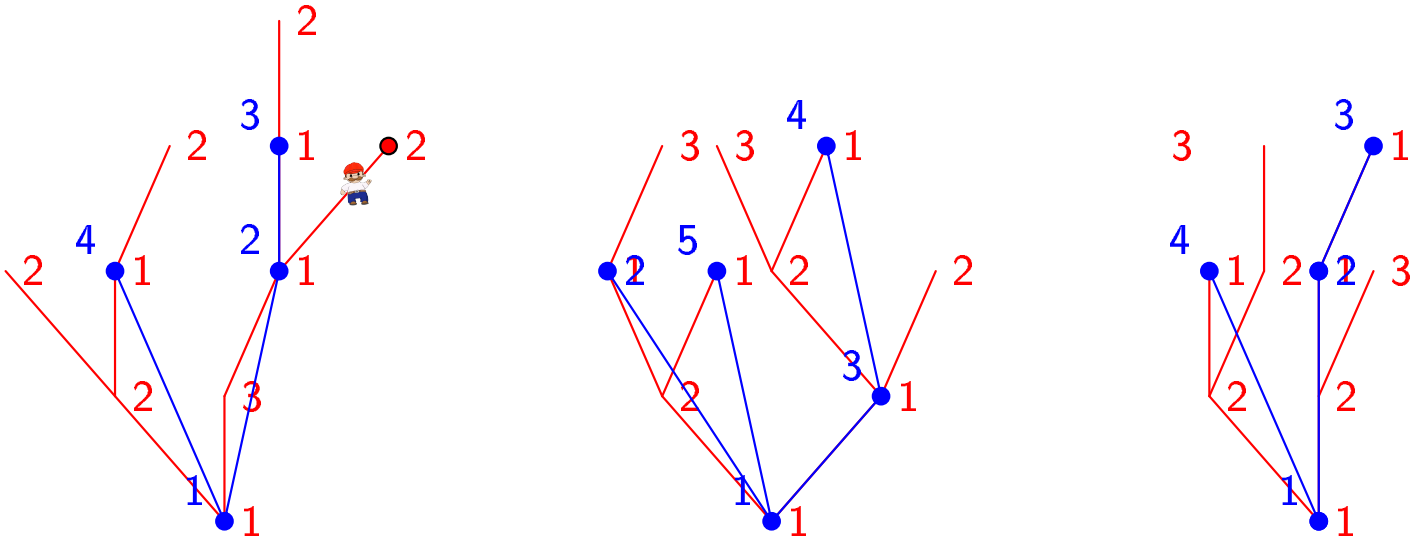
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

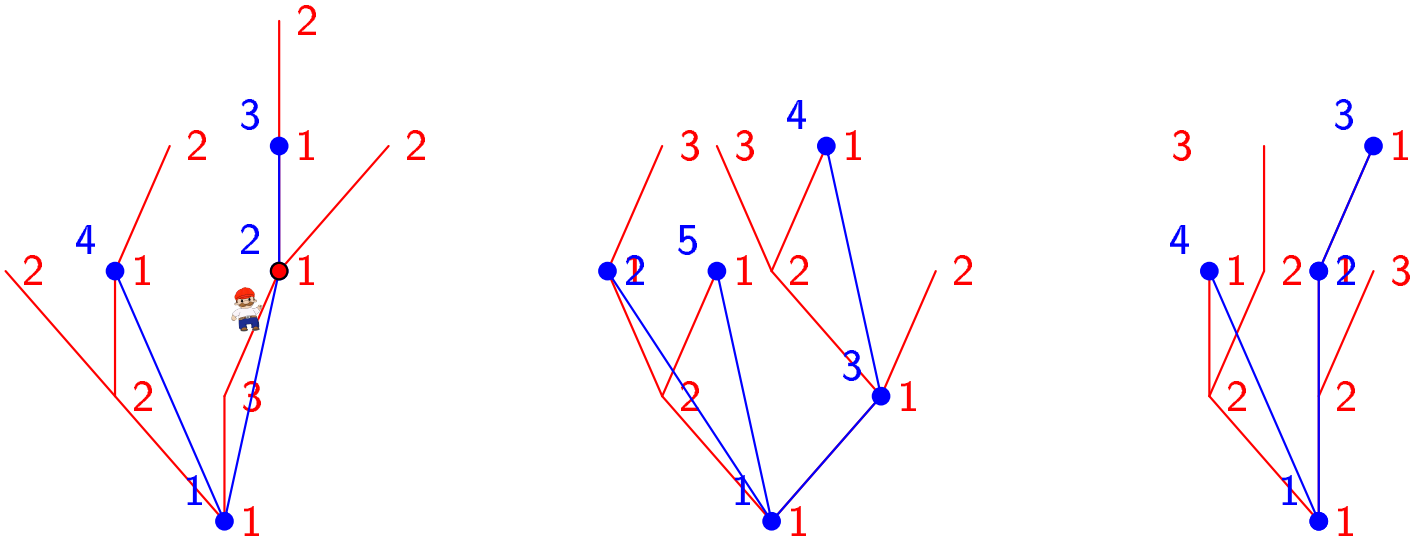
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

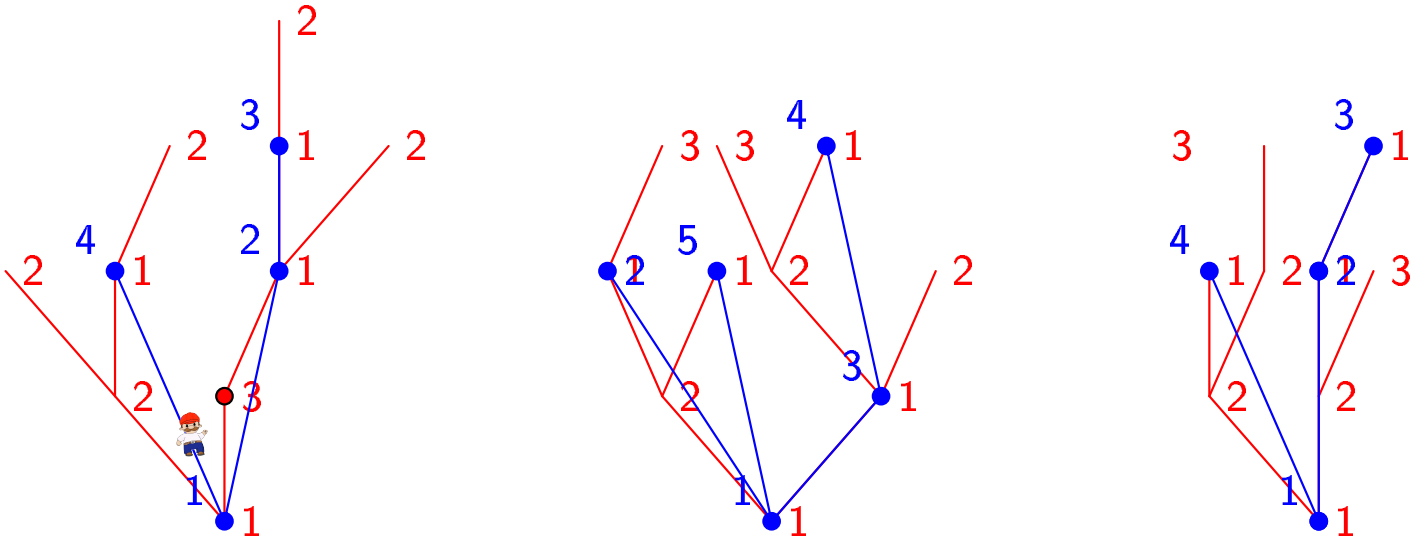
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

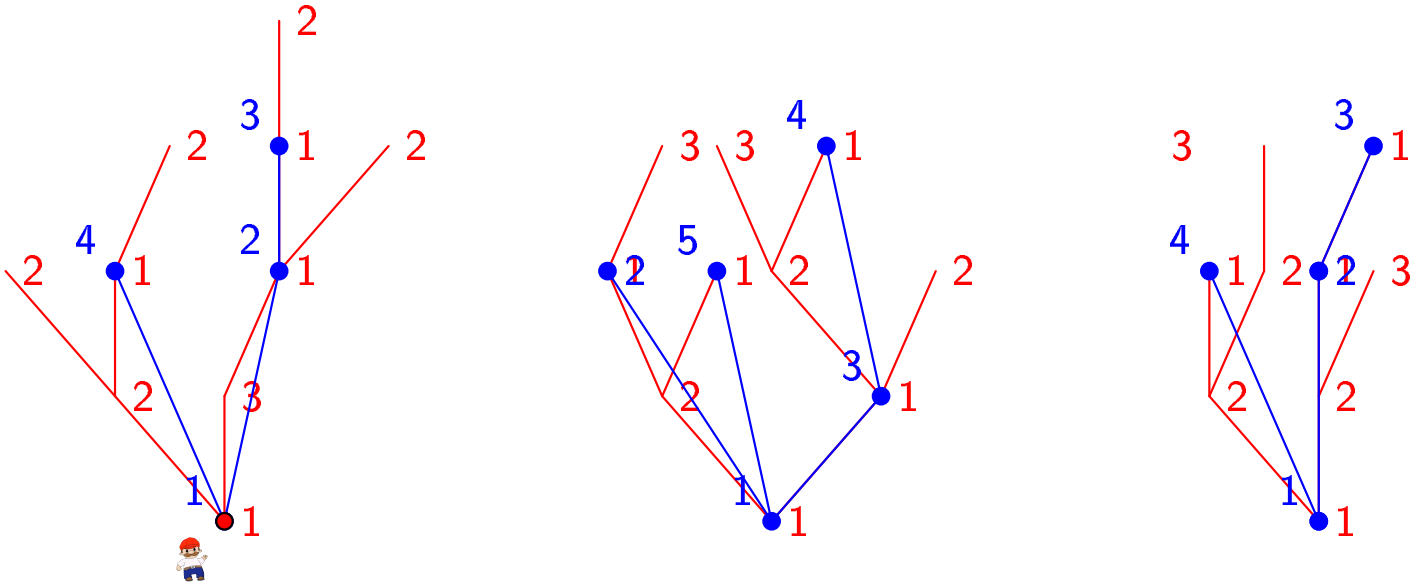
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

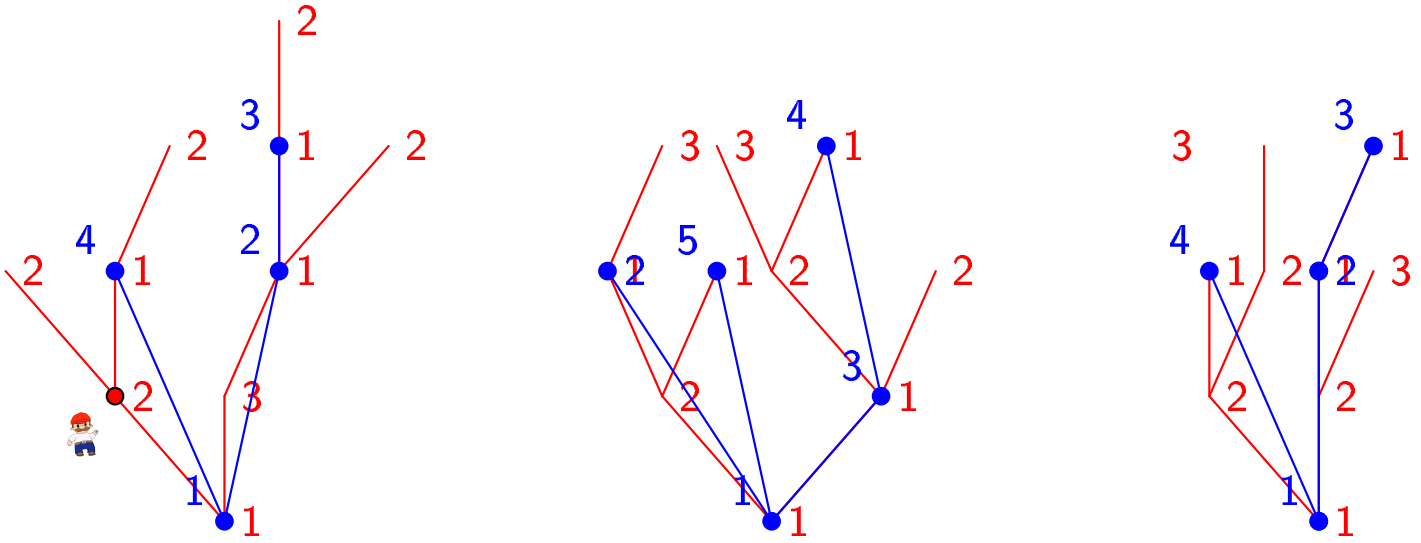
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

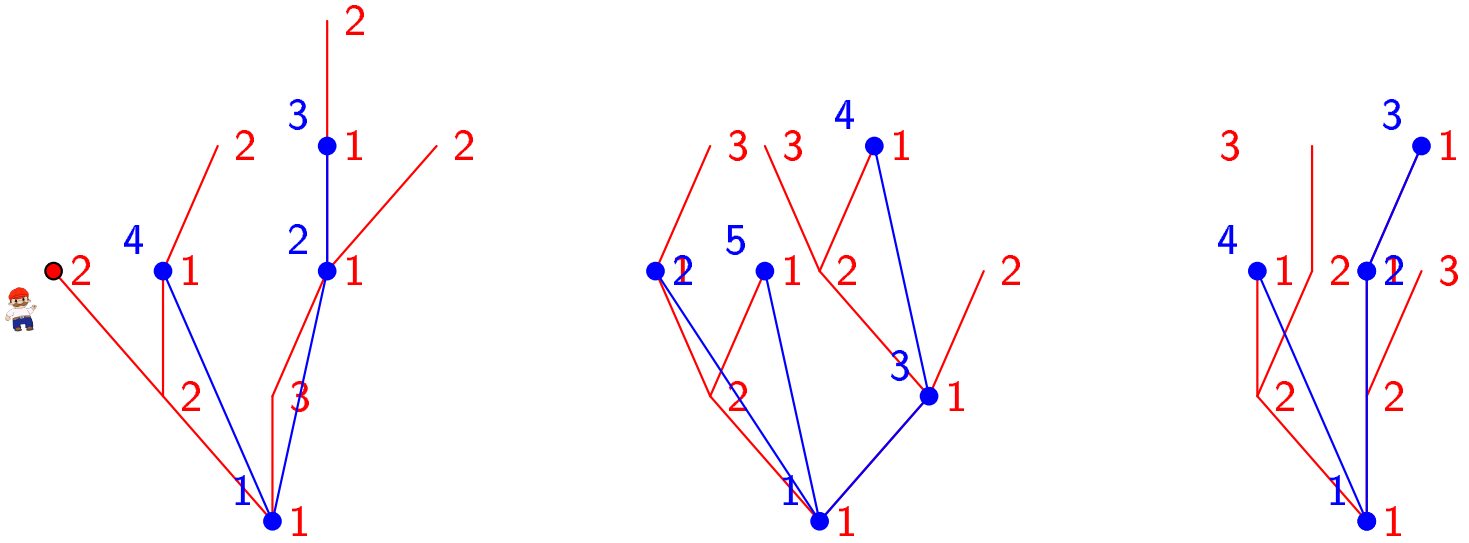
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

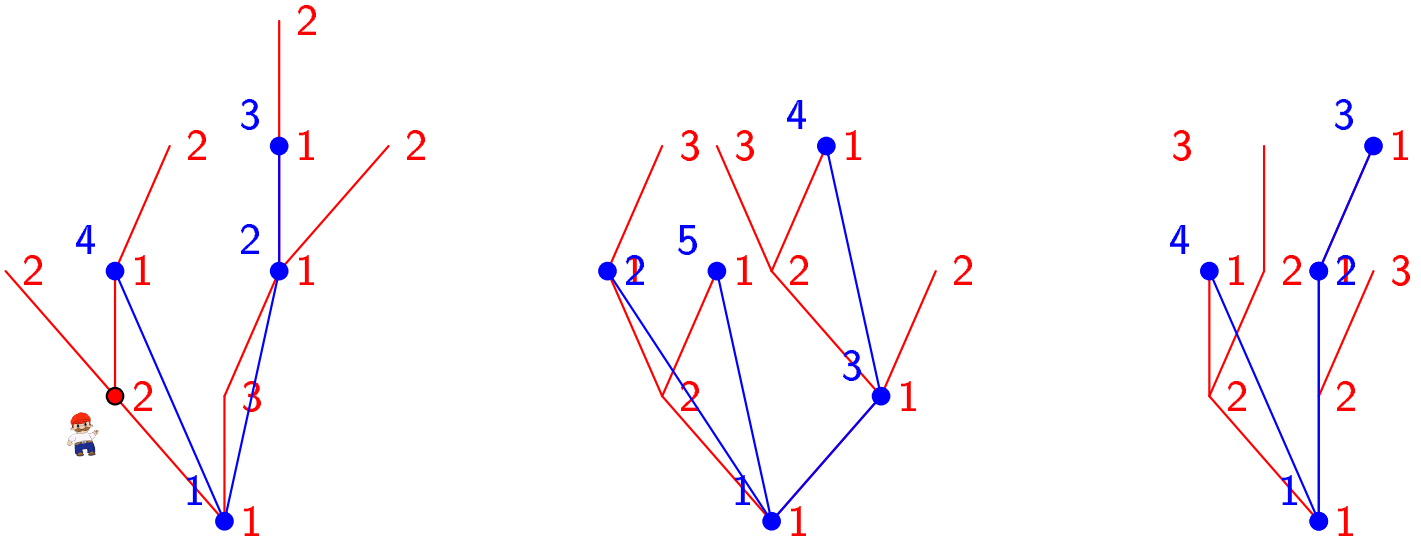
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

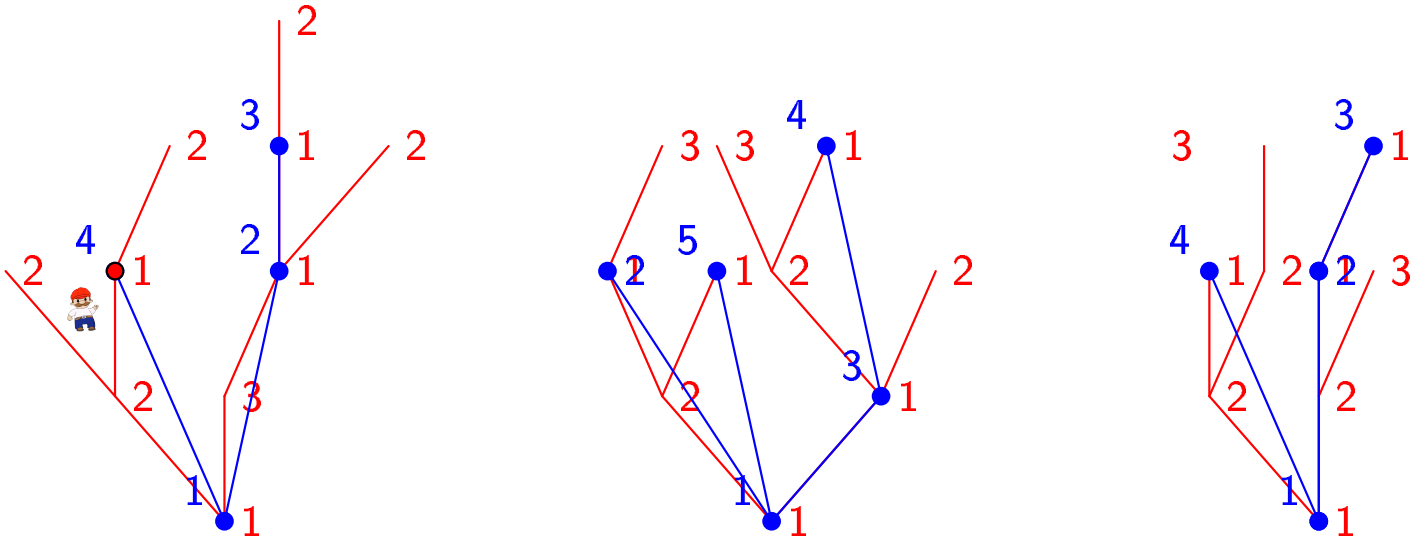
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

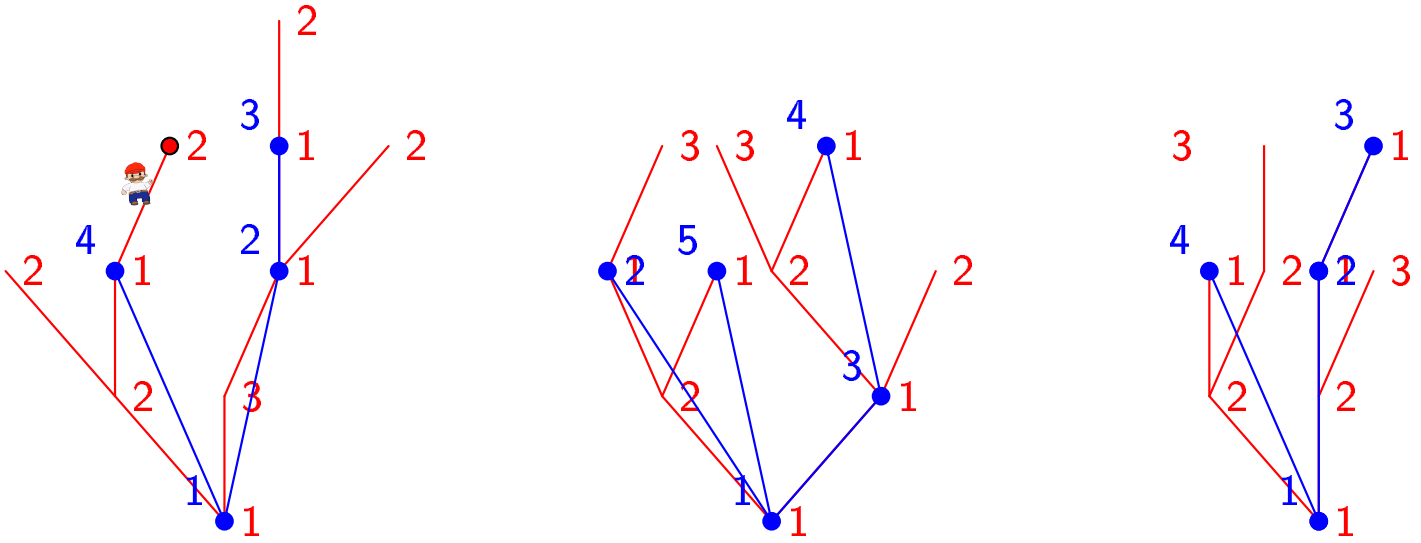
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

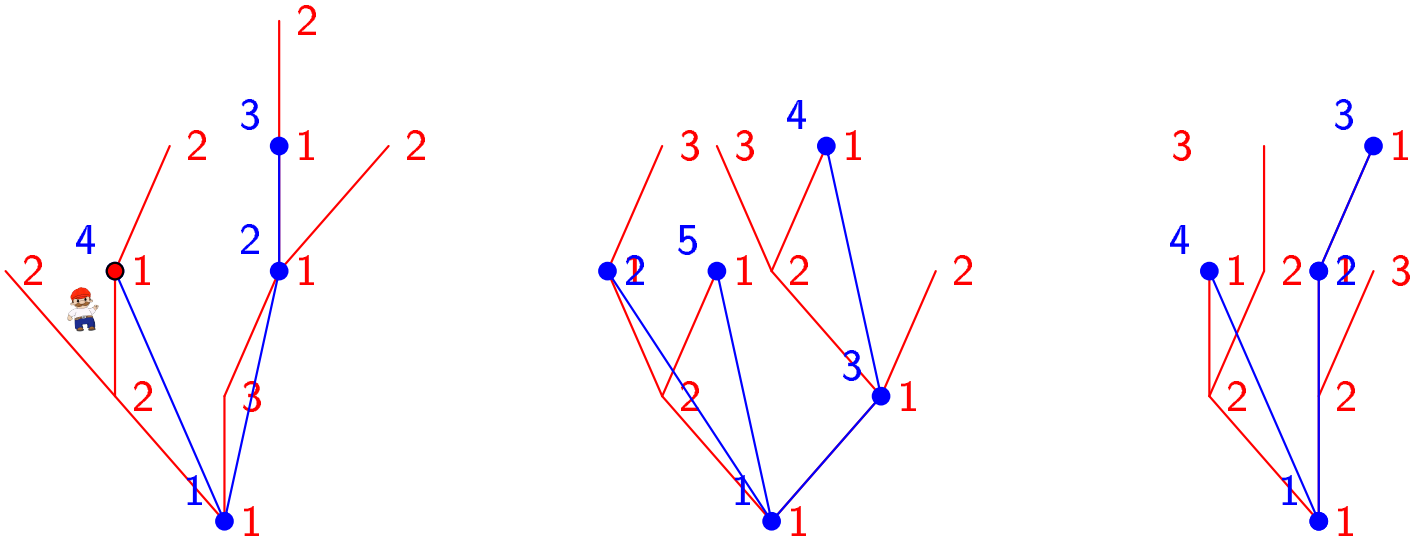
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

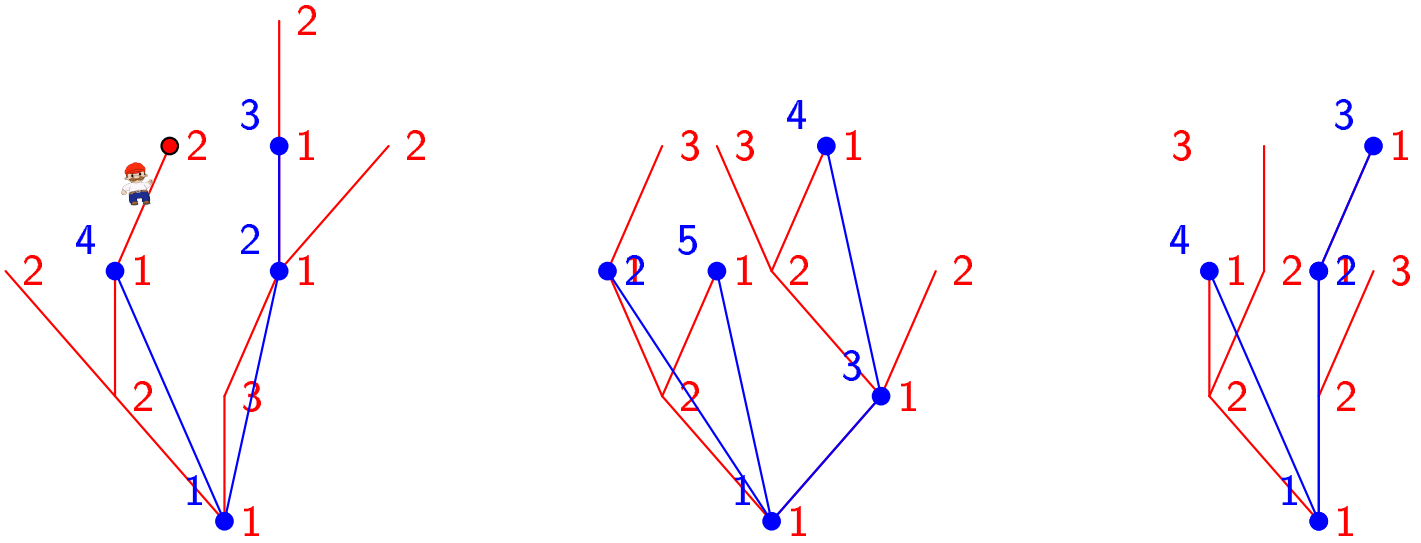
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

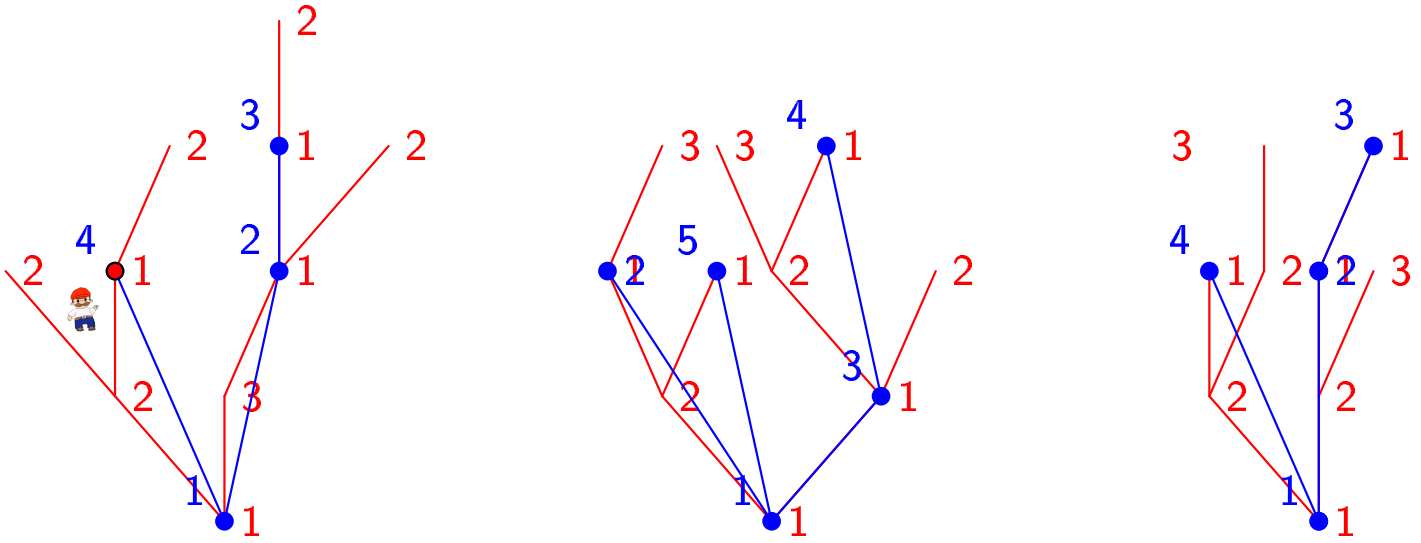
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

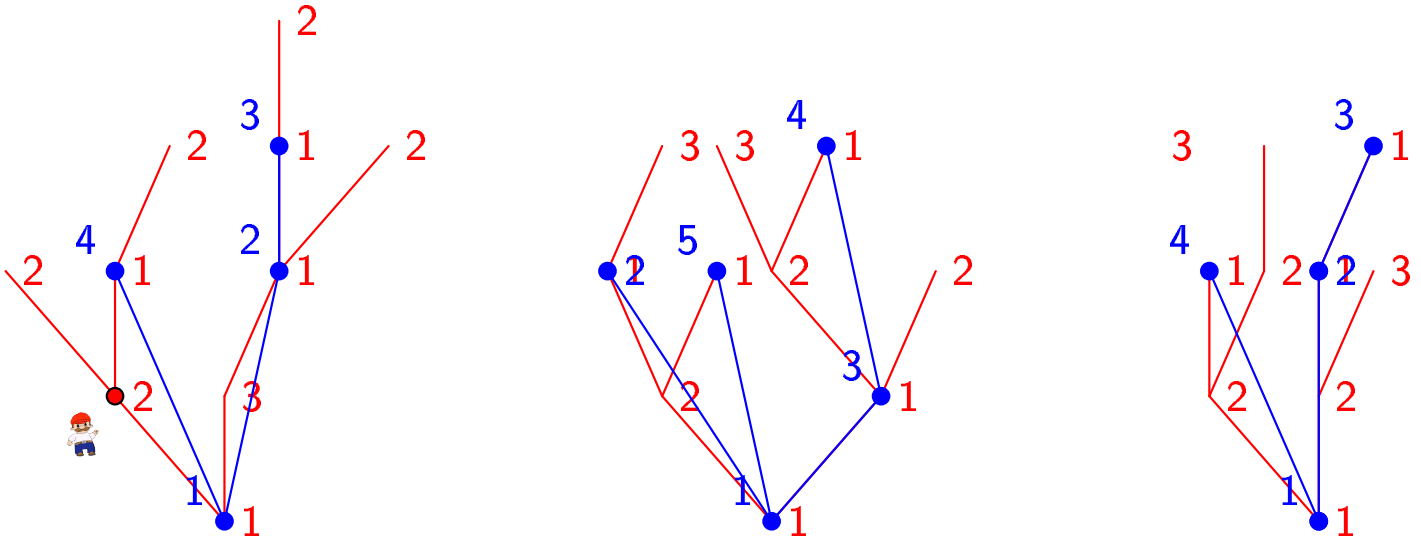
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

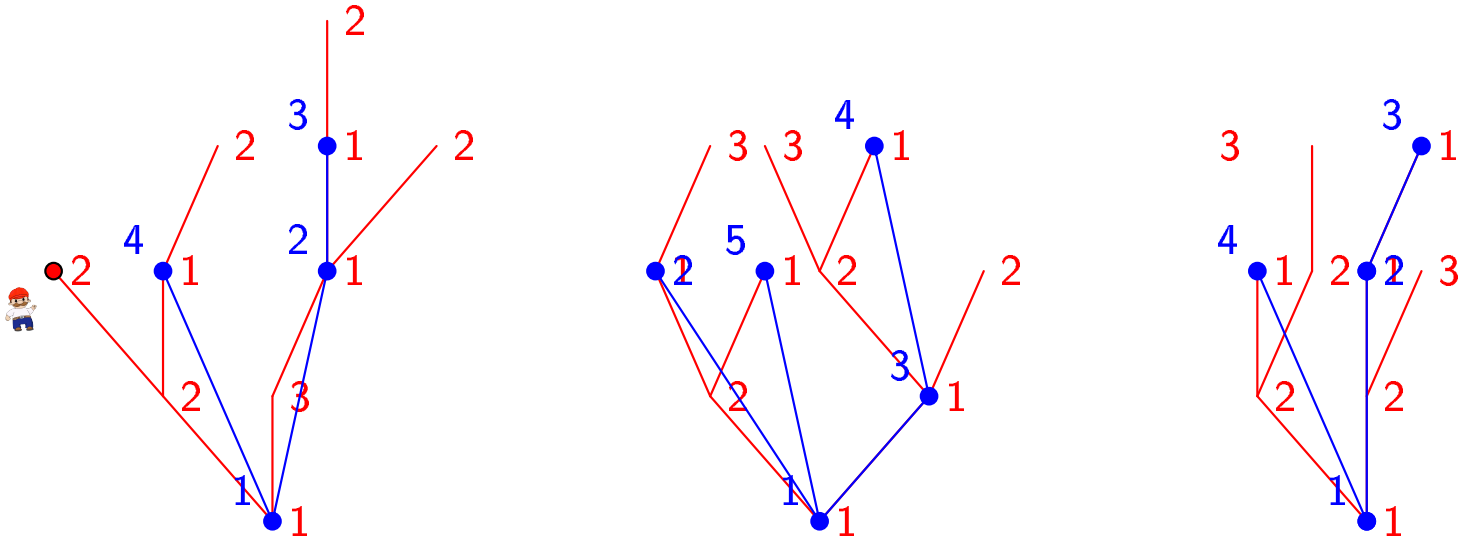
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

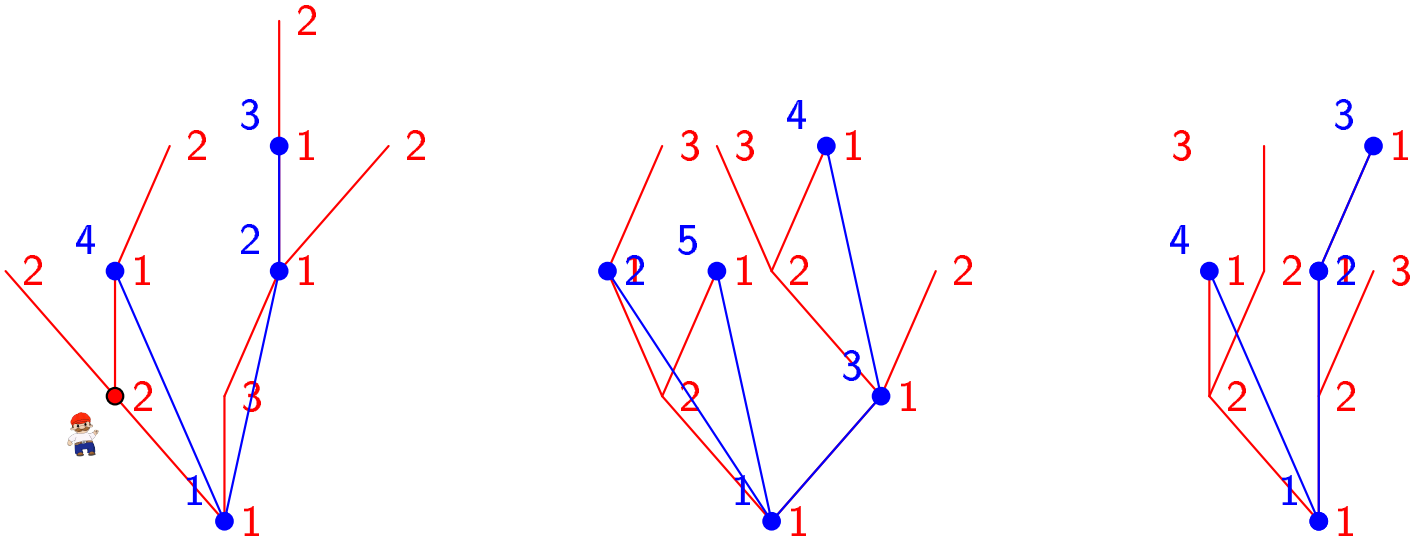
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

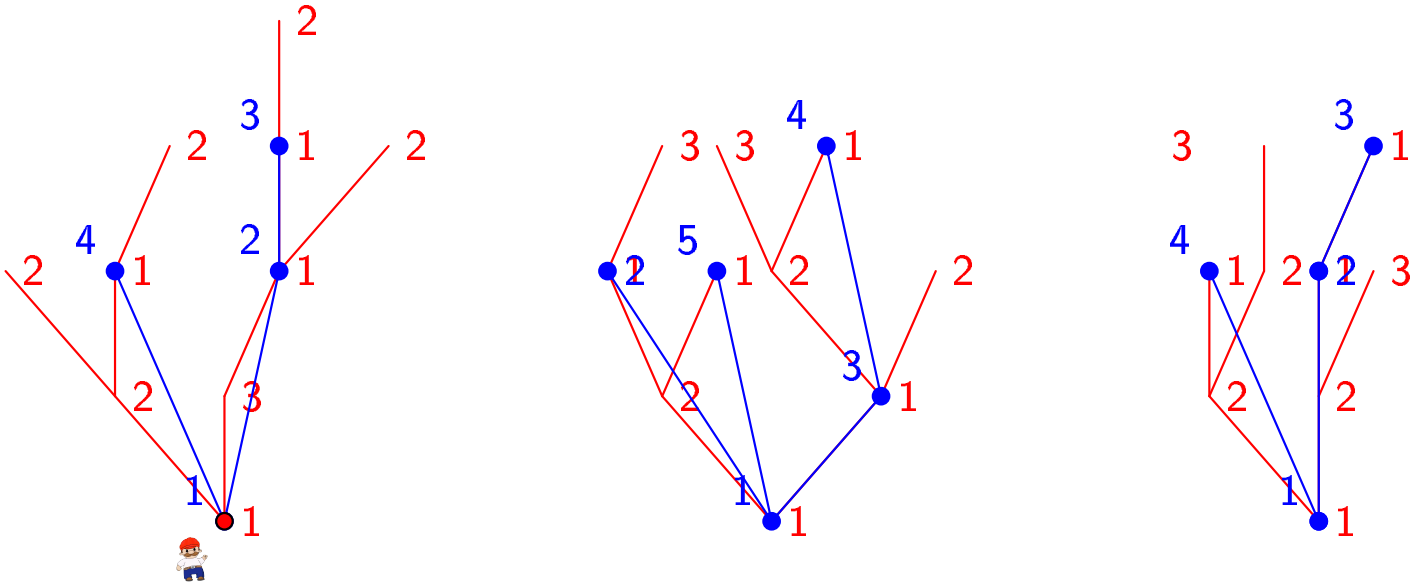
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

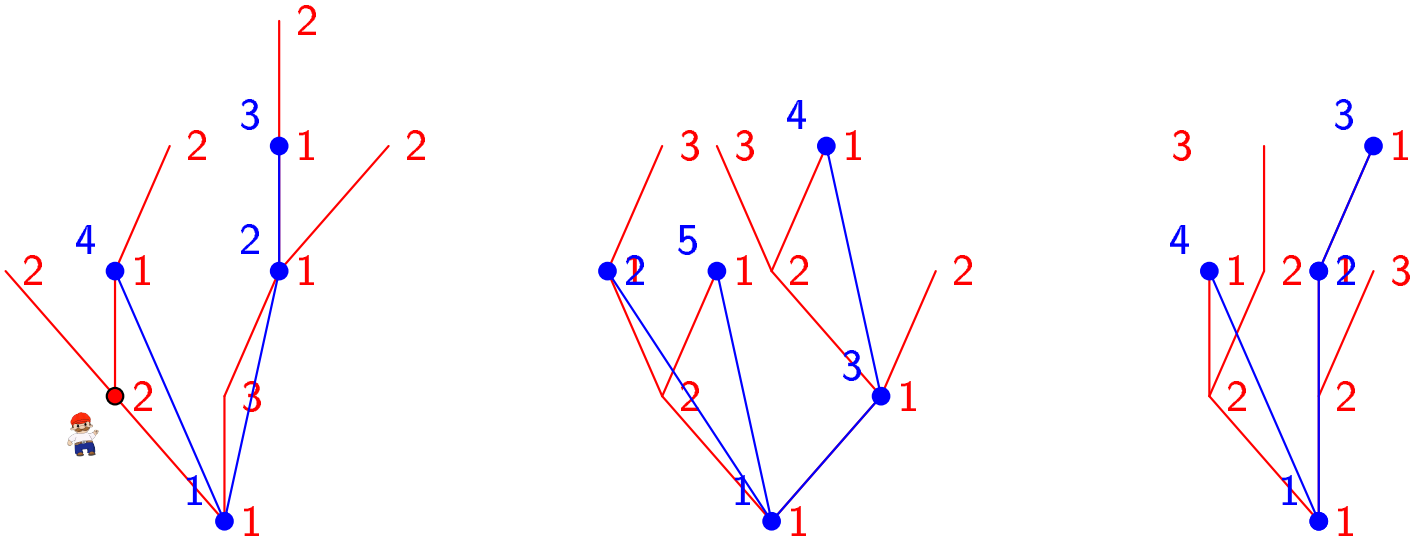
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

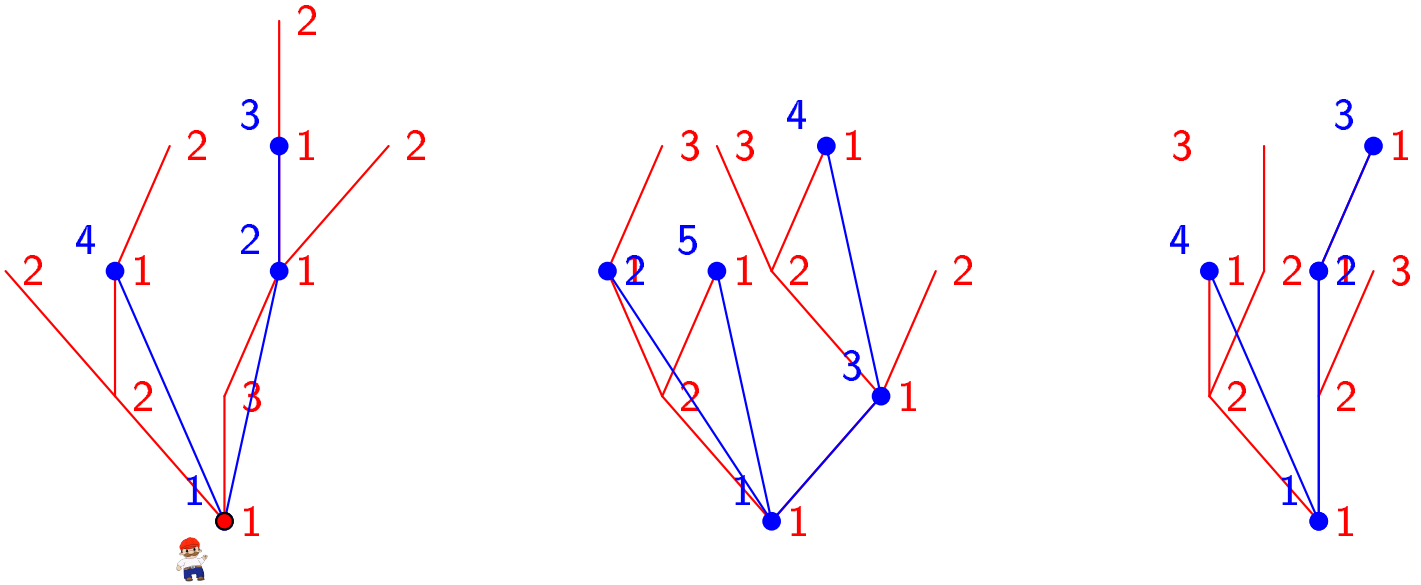
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

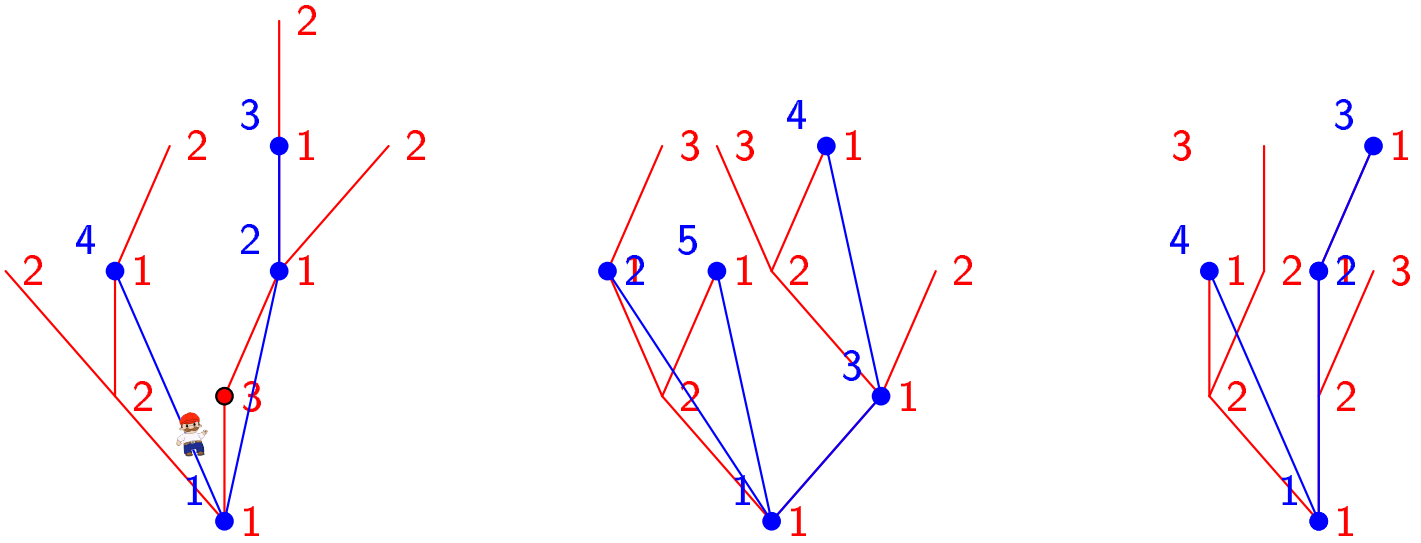
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

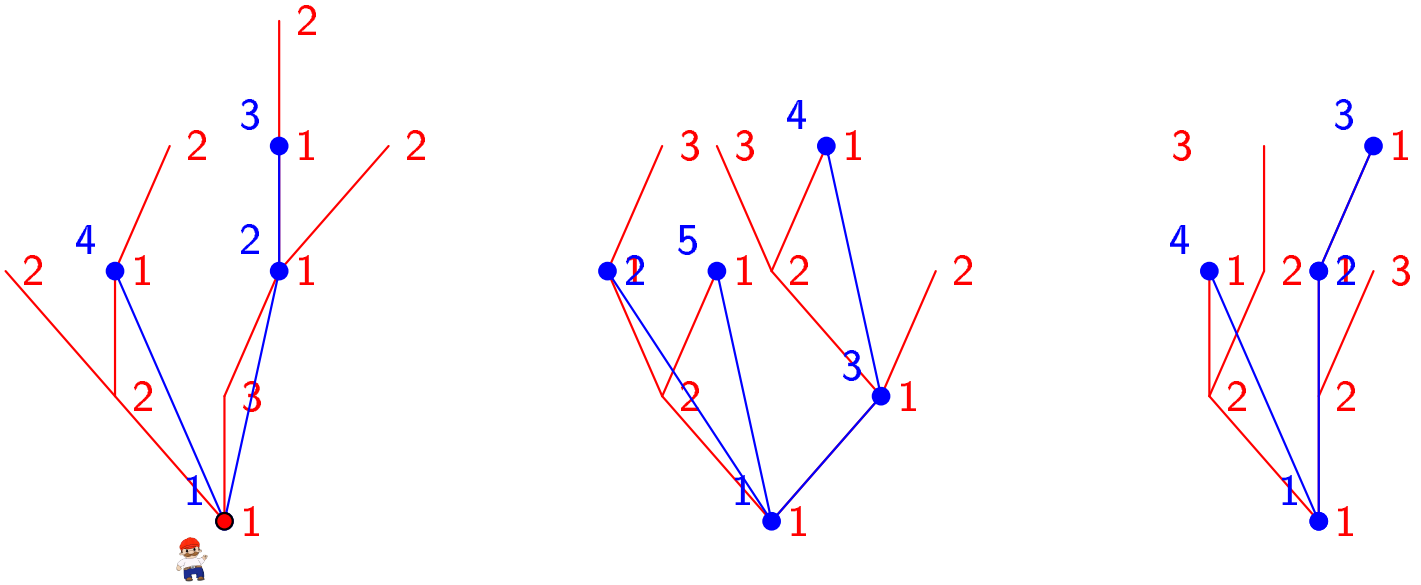
1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

# Preuve de la convergence de la fonction de hauteur

1) On lance la marche aléatoire, et l'on construit la trace
2) On ne garde que la trace, et l'on rembobine la marche aléatoire



3) On construit une forêt $\mathbb{F}'$ comme suit :
   - On construit la forêt de type 1 sous-jacente, **re-ordonnée**.
   - On lance la marche aléatoire sur $\mathbb{F}$ et à chaque pas de $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on ajoute un sommet correspondant dans $F'$, **que l'on attache à**

Fait :

Fait :

- $\mathbf{E}[\sum_{|x|=1, e(x)=1} 1] = 1$
- $\mathbf{E}[(\sum_{|x|=1} 1)^2] < \infty$
- $\mathbf{E}[(\max_{|x|=1} \ell(x))^2] < \infty$

Fait :

- $\mathbf{E}[\sum_{|x|=1, e(x)=1} 1] = 1$
- $\mathbf{E}[(\sum_{|x|=1} 1)^2] < \infty$
- $\mathbf{E}[(\max_{|x|=1} \ell(x))^2] < \infty$

**R. '14**

Dans les conditions ci-dessus, la forêt bi-type $\mathbb{F}'$ vérifie la convergence en loi :

Fait :

- $\mathbf{E}[\sum_{|x|=1, e(x)=1} 1] = 1$
- $\mathbf{E}[(\sum_{|x|=1} 1)^2] < \infty$
- $\mathbf{E}[(\max_{|x|=1} \ell(x))^2] < \infty$

**R. '14**

Dans les conditions ci-dessus, la forêt bi-type $\mathbb{F}'$ vérifie la convergence en loi :

$$\left( \frac{H^{\mathbb{F}'}_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}}, t \geq 0 \right) \xrightarrow[n \to \infty]{d} \left( \frac{2}{C} |B_t|, t \geq 0 \right)$$

Fait :

- $\mathbf{E}[\sum_{|x|=1, e(x)=1} 1] = 1$
- $\mathbf{E}[(\sum_{|x|=1} 1)^2] < \infty$
- $\mathbf{E}[(\max_{|x|=1} \ell(x))^2] < \infty$

**R. '14**

Dans les conditions ci-dessus, la forêt bi-type $\mathbb{F}'$ vérifie la convergence en loi :

$$\left( \frac{H^{\mathbb{F}'}_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}}, t \geq 0 \right) \xrightarrow[n \to \infty]{d} \left( \frac{2}{C} |B_t|, t \geq 0 \right)$$

où $B$ est un mouvement brownien, $C$ une constante explicite, et où la convergence a lieu pour la topologie de Skorokhod dans $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.

Merci !

Merci !

et bon appétit.